نام و نام خانوادگی: .....
مقطع و رشته: دوازدهم ریاضی
نام پدر: .....
شماره داوطلب: .....
تعداد صفحه سؤال: ۲ صفحه

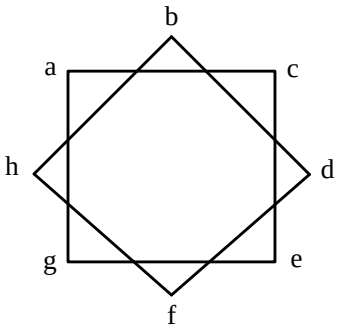
جمهوری اسلامی ایران
اداره ی کل آموزش و پرورش شهر تهران
اداره ی آموزش و پرورش شهر تهران منطقه ۶ تهران
دبیرستان غیردولتی دخترانه سرای دانش واحد فلسطین
امتحانات **نیم سال اول** سال تحصیلی **۱۴۰۵-۱۴۰۴**
www.sarayedanesh.com
۰۲۱-۲۹۳۶

نام درس: گسسته
نام دبیر: لیلا رستگاریان
تاریخ امتحان: ۲۶ / ۱۰ /۱۴۰۴
ساعت امتحان: ۰۸:۳۰ صبح/ عصر
مدت امتحان : ۱۲۰دقیقه

نمره به عدد:	نمره به حروف:	نمره تجدید نظر به عدد:	نمره به حروف:	محل مهر و امضاء مدیر
نام دبیر:	تاریخ و امضاء:	نام دبیر:	تاریخ و امضاء:	

ردیف	سؤالات	بارم
۱	**درستی یا نادرستی عبارت های زیر را مشخص کنید.** الف) معادله هم نهشتی $ax \overset{m}{\equiv} b$ دارای جواب است اگر و تنها اگر $(b,m)\mid a$ ب) دو عدد $(n+۲, n+۳)$ نسبت به هم اول اند $(n \in \mathbb{Z})$ پ) گراف G که در آن $\delta(G)=۰$ است یک گراف ناهمبند است. ت) برای سه مجموعه A,B,C، اگر $A\cup B = A\cup C$ باشد آن گاه $B=C$	۱
۲	اگر $n \in \mathbb{Z}$ و $a \overset{m}{\equiv} b$ باشند آن گاه ثابت کنید $a^n \overset{m}{\equiv} b^n$.	۱
۳	به روش بازگشتی ثابت کنید $\forall x,y,z \in \mathbb{Z}; x^۲y^۲ + y^۲z^۲ + x^۲z^۲ \geq xyz(x+y+z)$	۱/۵
۴	الف) اگر $a>۰$، ثابت کنید $a+\frac{۱}{a} \geq ۲$ ب) اگر x,y دوعدد حقیقی هم علامت باشند، حداقل عبارت $(x+y)(\frac{۱}{x}+\frac{۱}{y})$ چقدر است؟	۱/۷۵
۵	چند عدد صحیح a وجود دارد که $a \mid ۶k+۳$ و $a \mid ۴k+۳$ برقرار باشند؟	۱
۶	نشان دهید اگر $۷ \mid ۲۷x+۴۹$ آن گاه $۷ \mid x$ برقرار است.	۱
۷	کدام معادله هم نهشتی دارای جواب است و کدام نیست؟ چرا؟ اگر معادله دارای جواب است، جواب های آن را به دست آورید؟ الف) $۶x \overset{۸}{\equiv} ۱۱$ ب) $۵x \overset{۸}{\equiv} ۱۱$	۱/۵
۸	ثابت کنید عدد $۱۶^{۹۰} - ۱۵^{۹۰} - ۳۱^{۹۰}$ بر ۲۴۰ بخش پذیر است؟	۱

www.amoozeshmelli.com

۹	فرض کنیم $a \overset{m}{\equiv} b$ و $b \overset{n}{\equiv} c$ و $(m,n)=d$ ، در این صورت ثابت کنید $a \overset{d}{\equiv} c$؟	۱
۱۰	رقم یکان عدد $۱۳^{۳۱} \times ۶ + ۱۲^{۳}$ چند عدد است؟	۱
۱۱	اگر ۱۱ آذر یک سال روز دوشنبه باشد، سوم خرداد همان سال چند شنبه است؟	۱
۱۲	اگر $k \in z$ و $۷ \mid ۵k+۳$، ثابت کنید $۴۹ \mid ۲۵k^{۲} + ۴۴k + ۳۷$	۱
۱۳	معادله سیاله روبه رو را در صورت داشتن جواب حل کنید و جواب های طبیعی آن را به دست آورید: $۳۸x + ۲۲y = ۱۰۲۰$	۱/۵
۱۴	درجه رأس های گراف G از مرتبه ۴ برابر است با $۱, ۲, ۳, a$ این گراف را رسم کنید، مقدار a را به دست آورید. مکمل این گراف را رسم کنید. مجموع درجات رئوس گراف $\overline{G}$ را به دست آورید.	۱/۵
۱۵	اگرگراف k_p دارای ۱۵ یال باشد، p را به دست آورید؟ گراف $\overline{k}_p$ را رسم کنید.	۱
۱۶	با توجه به گراف رو به رو به سؤالات زیر پاسخ دهید. الف) گراف همبند است یا ناهمبند؟ ب) گراف منتظم است یا نامنتظم؟ پ) دورها و مسیرهایی به طول های ۵ و ۴ و ۳ در این گراف در صورت وجود بنویسید. ت) $N_G(a)$ و $N_G[a]$ را بنویسید. 	۱/۵
۱۷	۲۷ نفر در یک کلاس هستند که ۲۰ نفر آنها هر کدام دقیقاً با ۳ نفر دوست هستند. نشان دهید بقیه افراد نمی‌توانند هر کدام دقیقاً با ۳ نفر دوست باشند.	۰/۷۵
موفق باشید		

جمع بارم : ۲۰ نمره

www.amoozeshmeli.com

اداره ی کل آموزش و پرورش شهر تهران
اداره ی آموزش و پرورش شهر تهران منطقه ۶ تهران
دبیرستان غیر دولتی دخترانه سرای دانش واحدفلسطین
کلید سؤالات نیم سال اول سال تحصیلی ۱۴۰۵-۱۴۰۴

www.sarayedanesh.com

نام درس: گسسته
نام دبیر: لیلا رستگاریان
تاریخ امتحان: ۲۶ / ۱۰ /۱۴۰۴
ساعت امتحان: ۰۸:۳۰صبح/ عصر
مدت امتحان: ۱۲۰دقیقه

ردیف	راهنمای تصحیح	محل مهر یا امضاء مدیر
۱	الف) نادرست ب) درست پ) درست ت) نادرست	
۲	با توجه به اتحاد $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\dots+b^{n-1})$ داریم: $a\overset{m}{\equiv}b\Rightarrow m\mid a-b\Rightarrow m\mid(a-b)\underbrace{(a^{n-1}+a^{n-2}b+\dots+b^{n-1})}_{c}$ $\Rightarrow m\mid a^n-b^n\Rightarrow a^n\overset{m}{\equiv}b^n$	
۳	$\forall x,y,z,\in\mathbb{R},x^2y^2+y^2z^2+x^2z^2\geq xyz(x+y+z)$ طرفین عبارت را در دو ضرب کرده، داریم: $\Leftrightarrow 2x^2y^2+2y^2z^2+2x^2z^2-2x^2yz-2xy^2z-2yz^2\geq 0$ $\Leftrightarrow \underbrace{x^2y^2-2xy^2z+y^2z^2}_{(xy-yz)^2}+\underbrace{x^2y^2-2x^2yz+x^2z^2}_{(xy-xz)^2}+\underbrace{y^2z^2-2xyz^2+x^2z^2}_{(yz-xz)^2}\geq 0$ این عبارت همواره برقرار است.	
۴	الف) $a+\frac{1}{a}\geq 2\Leftrightarrow a^2+1\geq 2a\Leftrightarrow a^2-2a+1\geq 0\Leftrightarrow (a-1)^2\geq 0$ این عبارت همواره برقرار است ب) $(x+y)(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})=1+\frac{y}{x}+\frac{x}{y}+1=2+\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$ با توجه به قسمت (الف) $\frac{y}{x},\frac{x}{y}$ دو عبارت معکوس یکدیگرند مانند $a,\frac{1}{a}$ پس مجموع آنها بزرگتر مساوی ۲ است. $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2\Rightarrow 2+\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 4$ پس حداقل این عبارت ۴ است.	
۵	$a\mid 6k+3\overset{\times 4}{\Rightarrow}a\mid 24k+12$ $a\mid 4k+3\overset{\times 6}{\Rightarrow}a\mid 24k+18$ تفاضل سمت راست $\Rightarrow a\mid 6$ پس a برابر است با $\pm 1,\pm 2,\pm 3,\pm 6$ پس ۸ مقدار برای a وجود دارد.	

www.amoozeshmelli.com

۶

می دانیم $۷\mid ۲۸x+۴۹$

$$\left.\begin{array}{l} ۷\mid ۲۷x+۴۹ \\ ۷\mid ۲۸x+۴۹ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{تفاضل سمت راست}} ۷\mid x$$

۷

الف) $۱۱ \nmid (۶,۸)$ پس معادله جواب ندارد.

ب) $۱۱\mid(۵,۸)$ پس معادله جواب دارد.

$$۵x\overset{۸}{\equiv}۱۱\Rightarrow ۵x\overset{۸}{\equiv}۱۱+۲۴\Rightarrow ۵x\overset{۸}{\equiv}۳۵\Rightarrow x\overset{۸}{\equiv}۷\Rightarrow x=۸k+۷$$

۸

با توجه به اتحاد $(a+b)^n=a^n+\binom{n}{۱}a^{n-۱}b+\binom{n}{۲}a^{n-۲}b^۲+\ldots+b^n$

داریم: $(a+b)^n=a^n+b^n+ab\underbrace{\left[\binom{n}{۱}a^{n-۲}+\binom{n}{۲}a^{n-۳}b+\ldots+\binom{n}{n-۱}b^{n-۲}\right]}_{k}$

$$\Rightarrow (a+b)^n-a^n-b^n=ab(k)$$

$$\Rightarrow (a+b)^n\overset{ab}{\equiv}a^n+b^n$$

اگر $n=۹۰,b=۱۶,a=۱۵$ باشد با جایگذاری در این عبارت داریم:

$$(۱۵+۱۶)^{۹۰}\overset{۱۵\times۱۶}{\equiv}۱۵^{۹۰}+۱۶^{۹۰}\Rightarrow ۲۴۰\mid ۳۱^{۹۰}-۱۵^{۹۰}-۱۶^{۹۰}$$

۹

$$\left\{\begin{array}{l} (m,n)=d\Rightarrow d\mid m \\ a\overset{m}{\equiv}b\Rightarrow m\mid a-b \end{array}\right.\Rightarrow d\mid a-b$$

$$\left\{\begin{array}{l} (m,n)=d\Rightarrow d\mid n \\ b\overset{m}{\equiv}c\Rightarrow n\mid b-c \end{array}\right.\Rightarrow d\mid b-c$$

جمع سمت راست

$$\Rightarrow \quad d\mid a-c\Rightarrow a\overset{d}{\equiv}c$$

۱۰

$$۱۳^{۳۱}\times۶+۱۲^۳\overset{۱۰}{\equiv}?$$

$$(۱۳^۲)^{۱۵}\times۱۳\times۶+۱۲^۲\times۱۲\overset{۱۰}{\equiv}(۱۶۹)^{۱۵}\times۱۳\times۶+۱۲^۲\times۱۲$$

$$\left\{\begin{array}{l} ۱۶۹\overset{۱۰}{\equiv}-۱\Rightarrow (۱۶۹)^{۱۵}\overset{۱۰}{\equiv}-۱\Rightarrow (۱۶۹)^{۱۵}\times۷۸\overset{۱۰}{\equiv}-۱\times۷۸\overset{۱۰}{\equiv}-۷۸+۸۰\overset{۱۰}{\equiv}۲ \\ ۱۲^۲\times۱۲\overset{۱۰}{\equiv}۲^۲\times۱۲\overset{۱۰}{\equiv}۴۸\overset{۱۰}{\equiv}۸ \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} ۱۳^{۳۱}\times۶\overset{۱۰}{\equiv}۲ \\ ۱۲^۳\overset{۱۰}{\equiv}۸ \end{array}\right.\xrightarrow{\text{جمع طرفین}} ۱۳^{۳۱}\times۶+۱۲^۳\overset{۱۰}{\equiv}۲+۸\overset{۱۰}{\equiv}۰$$

۱۱

برای رسیدن از آذر به خرداد همان سال باید به عقب برگردیم.

$$-۱۱-۲\times۳۰-۳\times۳۱-۲۸\overset{۷}{\equiv}-۱۹۲\overset{۷}{\equiv}-۳$$

پس از روز دوشنبه سه روز به عقب برمی گردیم و به جمعه می رسیم. پس سوم خرداد جمعه بوده است.

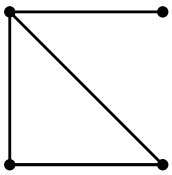
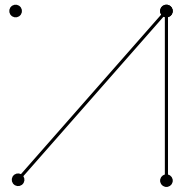
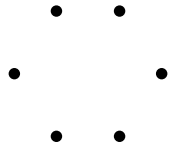
۱۲

$$۷\mid ۵k+۳\xrightarrow{\times۷}۴۹\mid ۳۵k+۲۱$$

تفاضل

$$\Rightarrow \quad ۴۹\mid ۲۵k^۲-۵k-۱۲$$

www.amoozeshmelli.com

	توان ۲ $۷\mid ۵k+۳ \Rightarrow ۴۹\mid ۲۵k^{۲}+۳۰k+۹$ از طرفی می دانیم $۴۹\mid ۴۹k+۴۹$ با جمع سمت راست تساوی داریم $۴۹\mid ۲۵k^{۲}+۴۴k+۳۷$
۱۳	شرط جواب $۱۰۲۰\mid (۳۸,۲۲)$ که برقرار است. همه عبارت را به ۲ تقسیم می کنیم. $۱۹x+۱۱y=۵۱۰ \Rightarrow ۱۹x \overset{۱۱}{\equiv} ۵۱۰ \Rightarrow ۱۹x+۱۱x \overset{۱۱}{\equiv} ۵۱۰$ $\Rightarrow ۳۰x \overset{۱۱}{\equiv} ۵۱۰ \Rightarrow x \overset{۱۱}{\equiv} ۱۷ \Rightarrow x \overset{۱۱}{\equiv} ۶ \Rightarrow x=۱۱k+۶$ با جایگذاری در معادله داریم: $۱۹(۱۱k+۶)+۱۱y=۵۱۰ \Rightarrow y=-۱۹k+۳۶$ $k=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۶ \\ y=۳۶ \end{cases} \qquad k=۱ \Rightarrow \begin{cases} x=۱۷ \\ y=۱۷ \end{cases}$
۱۴	$a=۲$ (a نمی تواند ۱ یا ۳ باشد زیرا تعداد درجات با رأس فرد باید عددی زوج باشد) و چون مرتبه گراف ۴ است و رأسی از درجه ۳ داریم پس رأس تنها نداریم. و a نمی تواند صفر باشد.  G  $\sum \deg(\bar{G})=۲+۱+۱=۴$ مکمل گراف $\bar{G}$
۱۵	$k_p=\frac{p(p-۱)}{۲}=۱۵ \Rightarrow p=۶$  $\overline{k}_{۶}$
۱۶	الف) ناهمبند ب) گراف ۲- منتظم پ) دور به طول ۴: $bdfhb, acega$ دور به طول ۵ و ۳ ندارد مسیر به طول ۳: $aceg, bdfh$ مسیر به طول بیشتر از ۳ ندارد ت) $N_G[a]=\{a,c,g\}, N_G(a)=\{c,g\}$
۱۷	افراد باقیمانده ۷ نفر هستند و چون در یک گراف تعداد رئوس با درجه فرد نمی تواند عددی فرد باشد پس امکان ندارد.

جمع بارم : ۲۰ نمره	**نام و نام خانوادگی مصحح :**	**امضاء:**

www.amoozeshmelli.com

www.amoozeshmelli.com