

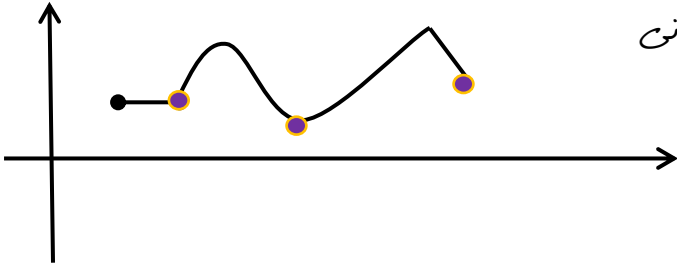
نقاط بحرانی - ماکزیمم و مینیمم مطلق و نسبی - صعودی و نزولی - جهت تقعر و نقطه عطف

نقطه بحرانی

نقطه $x \in D_f$ یک نقطه بحرانی تابع f است. \leftarrow هرگاه $f'(x_0) = 0$ موجود نباشد یا $f'(x_0)$ موجود نباشد.

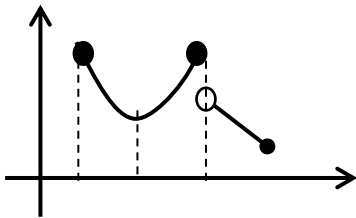
مثلاً در شکل مقابل \leftarrow ۵، ۲، ۳، ۱، ۲ : نقطه بحرانی

توجه کنید که ابتدا و انتهای باز، بحرانی!!

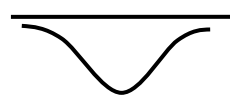
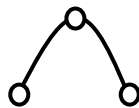


نقطه ماکزیمم مطلق: نقطه $x \in D_f$ نقطه ماکزیمم مطلق تابع f است هرگاه مقدار تابع در این نقطه از تمامی نقاط دیگر بیشتر یا با آنها مساوی باشد.

نقطه مینیمم مطلق: بطور مشابه تعریف می شود مثلاً در شکل مقابل: نقطه ماکزیمم و یا مینیمم مطلق را نقاط اکتریم مطلق می نامند.



تذکر: شکل های زیر ماکزیمم مطلق ندارد.





توجه: ماکزیمم و مینیمم مطلق، به ماکزیمم و مینیمم سراسری نیز خوانده می شوند.

نقطه ماکزیمم نسبی: نقطه $x \in D_f$ نسبی تابع f است، هرگاه مقدار تابع در این نقطه به نسبت نقاط اطرافش از قبیل یا با آن ها مویک باشد.

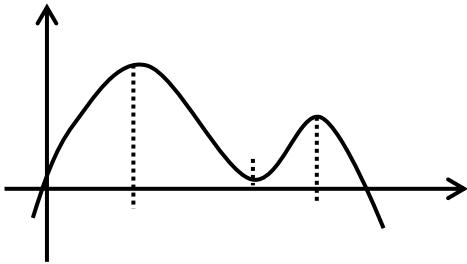
نقطه مینیمم نسبی: به طور مشابه تعریف می شود.

مثلاً در شکل مقابل: $x = 2, 4$: نقطه ماکزیمم نسبی (موضعی)

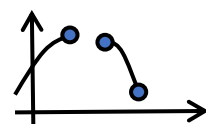
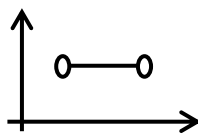
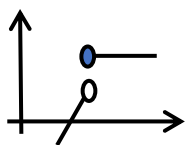
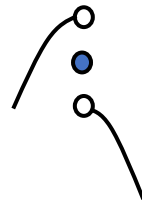
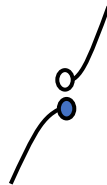
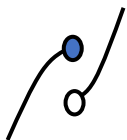
$x = 3$: نقطه مینیمم نسبی (موضعی)

منطقه ماکزیمم و مینیمم نسبی را نقاط اکتریم نسبی می نامند.

توجه: ماکزیمم و مینیمم نسبی، به ماکزیمم و مینیمم موضعی نیز خوانده شوند.

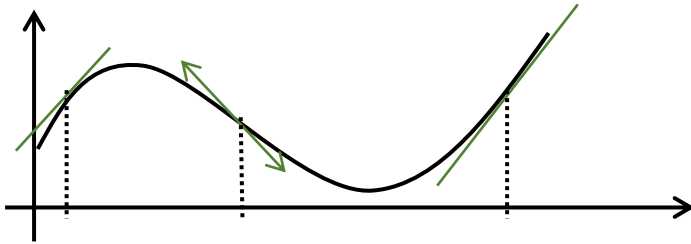


مثال: در هر شکل معلوم کنید نقطه مورد سوال ماکزیمم نسبی است یا مینیمم نسبی.

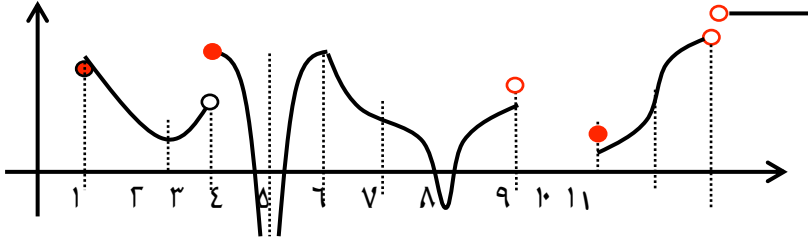


جهت تقعر و نقطه عطف

اگر نمودار تابع f مطابق شکل مقابل باشد. در $x=1$ خط مماس بر منحنی و بالای منحنی واقع است. در این نقطه تقعر منحنی به سمت پایین است. در تمامی باز $(4, 1)$ وضعیت اینگونه است و تقعر منحنی به سمت پایین است. در $x=7$ خط مماس بر منحنی موجود و زیر منحنی واقع است. در این نقطه تقعر منحنی به سمت بالاست. در تمامی باز $(4, +\infty)$ تقعر به سمت بالاست. $x=4$ که در آن دو ویژگی مهم مقابل را داراست. نقطه عطف منحنی است. (۱) تقعر عوض می شود. (۲) خط مماس بر منحنی موجود است.



مثال: برای شکل زیر موارد مقابل را تعیین کنید. (موارد ۷ گانه)



۱) بحرانی: $x = 2, 3, 5, 6, 7, 10, (11, +\infty)$

۲) ماکزیمم مطلق: $(11, +\infty)$

۳) مینیمم مطلق: ندارد

۴) ماکزیمم نسبی: $x = 3, 5, (11, +\infty)$

۵) مینیمم نسبی: $x = 2, 7, (11, +\infty)$

۶) جهت تغییر: $\begin{cases} \text{بالا: } (1, 3), (5, 6), (9, 10) \\ \text{پایین: } (3, 4), (4, 5), (6, 7), (7, 8), (10, 11) \end{cases}$

۷) نقطه عطف: $x = 6, 10$



اگر ضابطه‌ها داده شده باشد و بتوانیم نمودار آن ضابطه را رسم نماییم. در این صورت آن را رسم نموده و موارد ۷ گانه را مشخص می‌کنیم.

$$a) y = [x] + [-x]$$

$$b) f(x) = \begin{cases} \cos x, & |x| \leq \frac{\pi}{2} \\ 1, & |x| > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

- ۱) بحرانی :
- ۲) ماکزیمم مطلق :
- ۳) مینیمم مطلق :
- ۴) ماکزیمم نسبی :
- ۵) مینیمم نسبی :
- ۶) جهت تغییر :
- ۷) نقطه عطف :



$$۱) f(x) = ||x| - ۱|$$

- ۱) بحرانی :
- ۲) ماکزیمم مطلق :
- ۳) مینیمم مطلق :
- ۴) ماکزیمم نسبی :
- ۵) مینیمم نسبی :

$$۲) f(x) = x|x| \quad : x \in [-۱, ۲)$$

۱) بحرانی :

۲) ماکزیمم مطلق :

۳) مینیمم مطلق :

۴) ماکزیمم نسبی :

۵) مینیمم نسبی :

$$۳) y = |x^۲ - ۱| \quad : -۱ \leq x < ۲$$

۱) بحرانی :

۲) ماکزیمم مطلق :

۳) مینیمم مطلق :

۴) ماکزیمم نسبی :

۵) مینیمم نسبی :



$$۴) y = |x^2 - 2x| = |x(x - 2)|$$

۱) بحرانی :

۲) ماکزیمم مطلق :

۳) مینیمم مطلق :

۴) ماکزیمم نسبی :

۵) مینیمم نسبی :

$$۵) f(x) = |x|(x - 2) = \begin{cases} x(x - 2) & , x \geq 0 \\ -x(x - 2) & , x < 0 \end{cases} \quad x \in [-1, 2]$$

۱) بحرانی :

۲) ماکزیمم مطلق :

۳) مینیمم مطلق :

۴) ماکزیمم نسبی :

۵) مینیمم نسبی :



تمرین: نمودار هر یک از توابع داده شده را رسم نموده و سپس نمودار موارد ۷ گانه یاد شد فوق را تعیین کنید.

$$۱) y = ||x| - ۱|$$

$$۲) y = x|x|; x \in [-۱, ۲]$$

$$۳) y = |\sin x|; x \in \left(-\frac{\pi}{۲}, \frac{۵\pi}{۲}\right)$$

$$۴) |\cos x|$$

$$۵) y = |x^۲ - ۱|; -۱ \leq x < ۲$$

$$۶) y = |x^۲ - ۲x|$$

$$۷) y = |x|(x - ۲); x \in [-۱, ۲]$$

$$۸) y = [x]; x \geq -۱$$

$$۹) y = [x] + [-x]$$

$$۱۰) [x] - x; ۰ \leq x \leq ۳$$

$$۱۱) y = [\sin x]; |x| \leq \pi$$

$$۱۲) y = \sqrt{|x|}$$



اگر ضابطه داده شده باشد و نتوانیم نمودار آن را رسم کنیم.

ماکزیمم مینیمم مطلق (سراسری): ابتدا y را بدست آورد و نقاط بحرانی را پیدا می‌کنیم. پس برای نقاط بحرانی پیدا شده و نیز نقاط ابتدایی و انتهایی بازه عرض نقاط بدست می‌آوریم. نقطه‌ای که بیشترین عرض را داراست، ماکزیمم و آنکه کمترین را دارد، مینیمم مطلق است.

$$۱) y = 3x^2 - x^3, x \in [-1, 1]$$

$$۲) f(x) = x - 3\sqrt[3]{x}, 0 \leq x \leq 8$$

$$۳) y = (x - 5) \cdot x^{\frac{2}{3}}, x \in [-1, 1]$$



$$4) y = \sqrt{9 - x^2}$$

نکته: مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع که به ترتیب فوق بدست می آیند. یانگر بیشترین و کمترین و یا حداکثر و حداقل و نیز برد تابع است.

مثال: برد تابع با ضابطه $f(x) = x^3 - 12x + 8$ بر بازه $[-3, 1]$ کدام است؟

کنکور ۸۴ (سراسری ریاضی): برای کدام مقدار k ، بیشترین مقدار و کمترین مقدار تابع $f(x) = x^3 - 3x^2 + k$ در $[1, 3]$ قرینه اند؟

تمرین:

مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق توابع داده شده را بیابید.
نکته: در ۳ مورد آخر، باید خودتان تعریف را و در باز بدست آمده حل کنید.

$$۱) y = x - ۲\sqrt{x}, 0 \leq x \leq ۹$$

$$۲) y = ۳\sqrt[3]{x} - x, |x| \leq ۱$$

$$۳) y = \sqrt{x} - \sqrt{1-x}$$

$$۴) y = x \cdot \sqrt{۴ - x^2}$$

$$۵) y = x + \sqrt{1-x^2}$$



تخصیص یکنوازی تابع به کمک مشتق: مشتق اول تابع را تعیین علامت کرده....

مثال: تابع $f(x) = x + \frac{4}{x^2}$ در کدام بازه داره شده صعودی است.

(ج) $(0, 2)$

(الف) $(-\infty, 1)$

(د) $(2, +\infty)$

(ب) $(1, +\infty)$



پیدا کردن نقاط ماکزیمم و مینیمم نیمی وقتن ضابطه داده شده

برای این منظور روش زیر که به آزمون مشتق اول مرسوم است ابتدا آن را به دست آورده و جدول تعیین علامت را رسم میکنیم (این جدول بنام جدول تغییرات یا رفتار معروف است) در نقاطی که از جدول که تغییر علامت رخ دهد آکترمم نیمی وجود دارد. (نقطه متعلق به دامنه باشد)

مثال مهم: جدول تغییرات توابع داده شده را رسم کنید در مورد نقاط آکترمم بحث کنید؟

$$۱) f(x) = ۳x^۵ - ۵x^۳$$

$$۲) f(x) = (x - ۵)\sqrt[۴]{x^۲}$$



$$۳) f(x) = \sqrt[3]{x} - x$$

$$۴) f(x) = x + \frac{۴}{x^۲}$$



$$۵) f(x) = \frac{x}{x-۱}$$



کنکور ۸۷: کدام بیان برای تابع با ضابطه $f(x) = x \cdot |x^2 - 3|$ بر دامنه $[-1, 1]$ نادرست است.

- (۱) مینیمم مطلق دارد (۲) ماکزیمم مطلق دارد
 (۳) دو نقطه کترمم نسبی دارد (۴) فاقد اکترمم نسبی است.



جهت تقعر و نقطه عطف

ابتدا "لا" را بدست آورده و جدول تعیین علامت آن را رسم می کنیم در نقاطی که اف) $y'' > 0$ باشد، تقعر منحنی به سمت بالا است. ب) $y'' < 0$ باشد، تقعر منحنی به سمت پایین است. و در نقاطی که تغییر علامت رخ دهد، نقطه عطف وجود دارد. (نقطه متعلق به دامنه باشد)

مثال: جهت تقعر و نقطه عطف توابع داده شده را مشخص کنید.

$$۱) y = \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4}$$

$$۲) y = x + \sqrt[3]{x}$$



آزمون مشتق دوم

اگر $f'(c) = 0$, $f''(c)$ موجود باشد.

الف) اگر $f''(c) > 0$ آنگاه C نقطه **مینیم** موضعی است.

ب) اگر $f''(c) < 0$ آنگاه C نقطه **ماکزیم** موضعی است.

تذکره: اگر $f''(c) = 0$ با این آزمون امکان پاسخگویی نیست.

مثال: با استفاده از آزمون مشتق دوم، نقاط **ماکزیم** و **یا مینیم** موضعی تابع $f(x) =$

$$4 - 6x^2 + x^3 \text{ را تعیین کنید.}$$



ماتل پارامتری نقطه ماکزیمم یا مینیمم و نقطه عطف:

در این ماتل به موارد زیر توجه داریم:

- (۱) طول نقطه ماکزیمم یا مینیمم حتماً y' را صفر می‌کند.
- (۲) طول نقطه عطف حتماً y'' را صفر می‌کند.
- (۳) مشخصات نقطه ماکزیمم یا مینیمم و یا نقطه عطف و یا هر نقطه دلخواه دیگر واضح بر منحنی در ضابطه خود تابع صدق می‌کند.

مثال: تابع $f(x) = x^2 + ax + b \sin x + c$ مفروض است. a, b, c را چنان بیابید که A نقطه ماکزیمم یا مینیمم تابع بود و نقطه $x = \frac{\pi}{4}$ نقطه عطف آن باشد.

نکته: در برخی از سوالات تأکید بر نوع اکترمم وجود دارد که یعنی ماکزیمم باشد یا مینیمم.

کنکور ۸۹ (سراسری ریاضی): تابع با ضابطه $f(x) = \frac{a}{x} + bx^2$ در نقطه $(1, -2)$ دارای اکترمم نبی است. عدد a و نوع اکترمم نبی کدام است؟

نکته: در برخی از مسائل فقط عرض نقطه ماکزیمم یا مینیمم و یا نقطه عطف داده شده است، در این صورت خودمان بایستی طول نقطه مورد نظر را بدست آورده و به اتفاق عرض داده شده در ضابطه تابع قرار دهیم.

مثال: a را چنان بیابید که تابع $y = x^2 - ax + 4$ مینیمم مای ۳ داشته باشد.

نکته: نقاط تابع $y = |f(x)|$ عبارت است از (۱) نقاط بحرانی $y = f(x)$ (۲) ریشه های ساده $y = f(x)$

کنکور ۹۰ (سراسری ریاضی): تعداد نقاط بحرانی $y = |x^3 - x|$ در $-1 \leq x \leq 2$ ؟



جدول تغییرات (رفتار) تنظیم کنید و نقاط ماکزیمم و مینیمم را تعیین کنید و نمودار تابع را در نقاط مرز (روی خطوط) رسم کنید.

$$۱) y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}$$



$$۲) y = x - ۳\sqrt[3]{x}$$

$$۳) y = (x - ۱) \cdot x^{\frac{2}{3}}$$

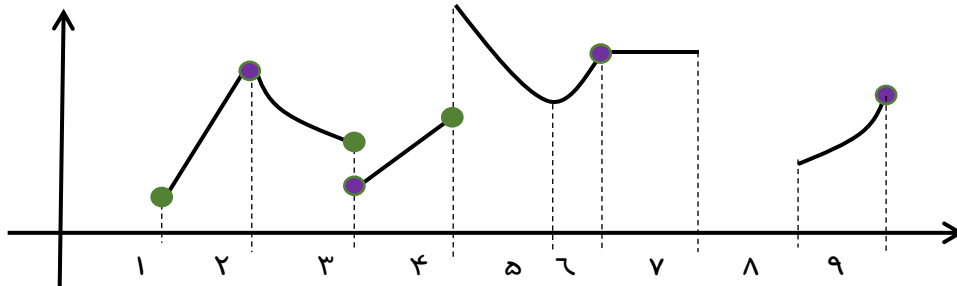
$$۵) y = x + \frac{۲}{x}$$

$$۶) y = \frac{x^۲}{x^۲ + ۱}$$

$$۷) y = \frac{۱}{x^۲ - ۴}$$



با توجه به شکل زیر به تست ۱۰۱ و ۱۰۲ و ۱۰۳ پاسخ دهید.



۱- تعداد نقاط بحرانی کدام است.

الف) ۷ (ب) ۸ (ج) ۹ (د) بی شمار

۲- تعداد نقاط ماکزیمم نسبی که مشتق ناپذیرند کدام است؟

الف) ۰ (ب) ۱ (ج) ۲ (د) ۳

۳- مجموعه نقاطی که هم ماکزیمم نسبی باشند و هم مینیمم نسبی کدام است.

الف) $\{6\}$ (ب) $\{2\}$ (ج) $\{6, 7\}$ (د) \emptyset

۴- در تابع $f(x) = \begin{cases} -x^2, & |x| < 1 \\ x-1, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$ تعداد نقاط بحرانی α و آکترمم مطلق β و آکترمم نسبی γ کدام درست است.

الف) $\alpha > \beta > \gamma$ (ب) $\alpha = \beta > \gamma$

ج) $\alpha > \beta = \gamma$ (د) $\alpha = \beta = \gamma$

۵- مجموع تعداد بحرانی و آکترمم مطلق و آکترمم نسبی تابع $y = x(|x| - 1)$ کدام است.

الف) ۳ (ب) ۴ (ج) ۵ (د) ۶





۶- اگر $f(x) = [-x]$ و مجموعه نقاط ماکزیمم M و مجموعه نقاط مینیمم N باشد، کدامیک درست است.

- الف) $M = N$ (ب) $M - N = R - Z$
 ج) $M - N = Z$ (ر) $N - M = Z$

۷- اگر $f(x) = |[x] - x|$ کدامیک از نقاط زیر را دارا نیست.

- الف) بحرانی (ب) ماکزیمم مطلق
 ج) مینیمم مطلق (ر) مینیمم نسبی

۸- مجموعه نقاط مرکزی نسبی تابع $f(x) = [x] - x$ کدام است.

- الف) \emptyset (ب) Z (ج) $R - Z$ (ر) R

۹- اختلاف بین مقادیر ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع به معادله $y = 2\sqrt{x}$ در $[0, 9]$ کدام است.

- الف) ۳ (ب) ۴ (ج) ۸ (ر) ۹

۱۰- نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی تابع $y = (x-1)x^{\frac{2}{3}}$ به ترتیب:

- الف) $x = \frac{2}{5}, x = 0$ (ج) $x = \frac{2}{5}, x = 0, x = 1$
 ب) $x = \frac{2}{5}, x = 1$ (ر) $x = 1, x = 0$

۱۱- تابع $f(x) = x - \sqrt[3]{x}$ کدام مورد را دارا نیست.

- الف) عطف با مماس افقی (ج) ماکزیمم
 ب) عطف با مماس عمودی (ر) مینیمم

۱۲- تعداد اکترمم نسبی تابع $y = (x-4)\sqrt[3]{x}$ کدام است.

- الف) ۳ (ب) ۲ (ج) ۱ (ر) ۰

۱۳- مجموع تعداد نقاط ماکزیمم و مینیمم و نقاط عطف تابع f با ضابطه $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$ کدام است.

- الف) ۴ (ب) ۳ (ج) ۲ (ر) ۱





۱۴- مجموع طول نقاط اکسترمم نسبی تابع $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{\sin x + 1}}$ در بازه $[-\pi, \pi]$ کدام است.

- الف) ۰ ب) ۳ ج) ۲ د) ۱

۱۵- در تابع $f(x) = x \cdot \cos x - \sin x$ مبدأ مختصات چگونه نقطه ای است.

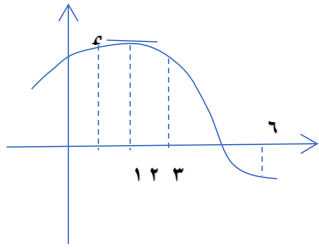
- الف) ماکزیمم ب) مینیمم ج) عطف د) نایب

۱۶- نمودار تابع $f(x) = 3x + \frac{1}{x^2}$ در هم‌ایلی $x = 1$ کدام است.

۱۷- نمودار تابع $y = x - \tan x$ در نزدیکی $x = \pi$ کدام است.

۱۸- نمودار $f(x) = \cos x - \cot x$ در نزدیکی نقطه $x = \frac{\pi}{2}$ کدام است.

۱۹- نمودار تابع چند جمله ای f مطابق شکل مقابل است. در کدام نقطه داریم $f(x) \cdot f'(x) \cdot f''(x) < 0$.



- الف) $x = 1$ ب) $x = 2$ ج) $x = 3$ د) $x = 6$

۲۰- اگر $A(1, 3)$ نقطه ماکزیمم یا مینیمم تابع $y = ax^2 + \frac{b}{x}$ باشد، حاصل $2a + b$ کدام است.

- الف) ۳ ب) ۴ ج) ۵ د) ۶

۲۱- اگر نقطه عطف تابع $y = \sqrt{3} \sin x - \cos x + k$ روی خط $y = 1$ باشد، k کدام است.

- الف) ۰ ب) ۲ ج) -۲ د) ۱



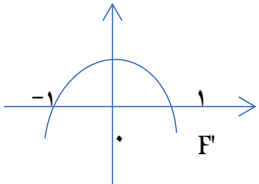
۲۲- در کدام مورد نقطه C نقطه ماکزیمم نسبی است.

الف) $f'(c) = 0, f''(c) > 0$ (ج) $f'(c) > 0, f''(c) = 0$

ب) $f'(c) = 0, f''(c) < 0$ (د) $f'(c) < 0, f''(c) = 0$

۲۳- با توجه به شکل مقابل f در چه بازه ای صعودی است.

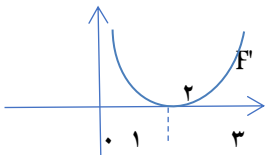
الف) $(-1, 1)$ (ب) $(-\infty, 0)$ (ج) $(0, +\infty)$ (د) R



۲۴- با توجه به شکل مقابل در چه بازه ای تقعر نمودار تابع f به سمت بالا است.

الف) R (ج) $(-\infty, 2)$

ب) $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$ (د) $(2, +\infty)$



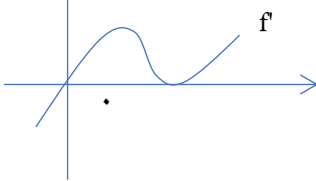
۲۵- با توجه به شکل مقابل، نمودار تابع f دارای

الف) یک ماکزیمم و یک عطف

ب) یک مینیمم و یک عطف

ج) یک ماکزیمم و دو عطف

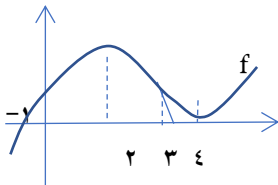
د) یک مینیمم و دو عطف



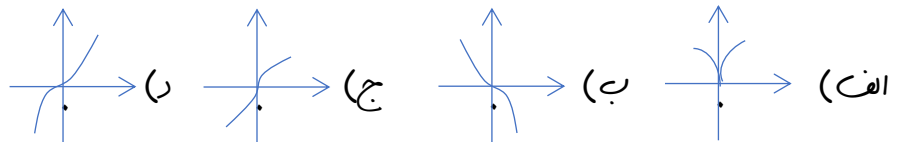
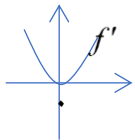
۲۶- با توجه به شکل مقابل در چه بازه ای f' نزولی آید است.

الف) $(-\infty, -1]$ (ب) $[2, 4]$

ج) $(-\infty, 3]$ (د) $(-\infty, 3)$

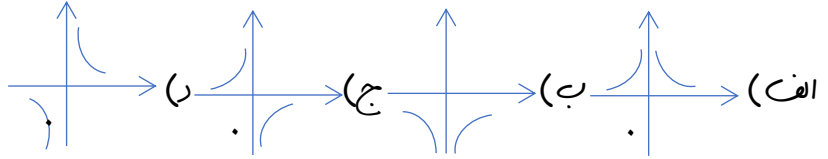
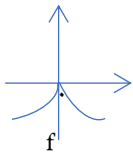


۲۷- با توجه به نمودار مقابل، کدامیک می تواند نمودار f باشد.

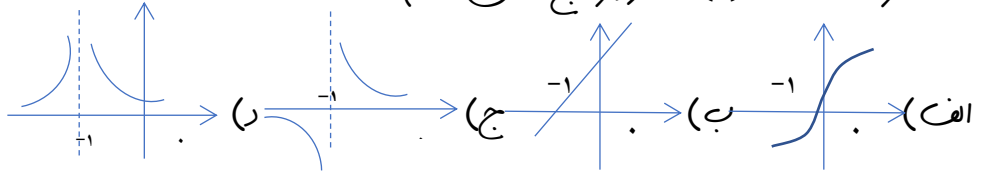




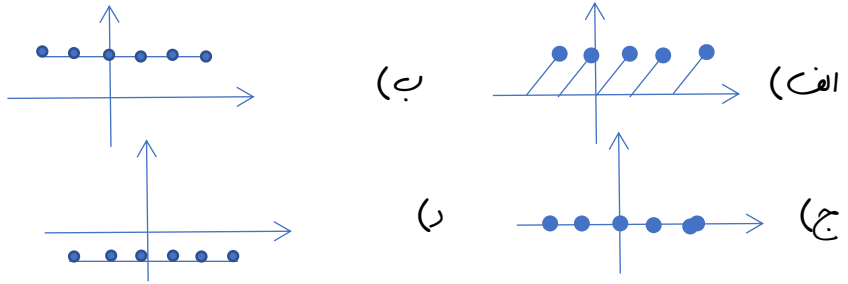
۲۸- با توجه به شکل مقابل، نمودار تابع f' کدام است.



۲۹- اگر $f(x) = \sqrt{x+1}$ ، نمودار تابع مشتق کدام است.

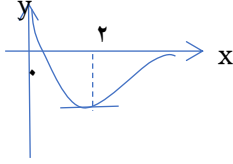


۳۰- اگر $f(x) = x - [x]$ ، نمودار تابع f' کدام است.



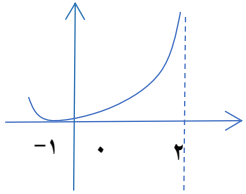
سوالات چهارگزینه‌ای:

۱- شکل مقابل سمتی از نمودار $y = \frac{ax^3+bx+1}{(x+c)^3}$ است. b کدام است؟



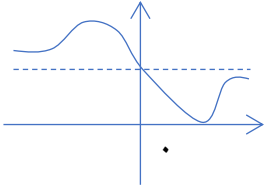
- الف) $\frac{3}{2}$ ب) $-\frac{2}{3}$ ج) $-\frac{2}{4}$ د) $-\frac{4}{3}$

۲- شکل مقابل سمتی از نمودار $y = \frac{x^2+mx+n}{x^2+px+17}$ است حاصل $m+n+p$ کدام است؟



- الف) ۵- ب) ۷- ج) ۱۰- د) ۱۱-





۳- شکل مقابل نمودار تابع $y = \frac{ax^2+bx+2}{x^2+1}$ است، حاصل $a+b$ کدام است؟

(د) -۲

(ب) -۱ (ج) ۲

(الف) ۱



آهنگ تغییرات:

فرض کنیم f تابعی از x باشد:

الف) منظور از آهنگ آنی تغییرات f نسبت به تغییرات x عبارت است از: $f'(x)$

ب) منظور از آهنگ متوسط (میانگین) تغییرات f نسبت به تغییرات x وقتی متغیر x از x_1 به x_2 می‌رسد عبارت

$$\text{است از: } \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

توجه: ممکن است بجای کلمه آهنگ کلمه سرعت مورد استفاده قرار بگیرد.

تذکر: آهنگ آنی در یک نقطه مورد سوال قرار می‌گیرد و برای محاسبه آن بایستی مشتق گیری شود اما

آهنگ متوسط در یک فاصله (بازه) محاسبه می‌شود و نیازی به مشتق ندارد.





مثال: شعاع دایره AC در حال بزرگ شدن است: $S(R) = \pi R^2$

الف) سرعت تغییرات مساحت دایره نسبت به تغییرات شعاع آن وقتی شعاع $R=5$ موی باشد؟

ب) آهنگ متوسط تغییرات مساحت دایره نسبت به تغییرات شعاع آن وقتی شعاع از $R_1=4$ به $R_2=10$ می رسد؟

تعبیر آهنگ آن: فرض کنیم f تابعی از x باشد:

وقتی متغیر x موی a باشد مقدار تابع موی $f(a)$ خواهد بود اینک چنانچه x یک واحد افزایش یافته و به $a+1$ رسد، مقدار تابع نیز $f(a+1)$ خواهد بود و مقدار تغییرات تابع f که با نماد Δf نمایش داده می شود موی است با:

$$\Delta f = f(a + 1) - f(a)$$

اما مهم اینک: $f'(a)$ یعنی مشتق تابع f در نقطه a یا به عبارتی آهنگ آن تغییرات f در نقطه a به عنوان تقریب برای $f(a+1)-f(a)$ بکار می رود.

مثال: تابع مشتق پذیر $p(t)$ ، جمعیت جامعه ای را پس از t سال نشان می دهد توضیح دهید
الف) $p'(5)=10000$ چه مفهومی دارد؟ جواب: یعنی در فاصله زمانی $5 \leq t \leq 6$ که همان سال ششم
است جمعیت ۱۰۰۰۰ نفر افزایش دارد. (تقریبی)

ب) $p'(10)=-2000$ یعنی چه؟ جواب: در $10 \leq t \leq 11$ یعنی سال یازدهم جمعیت ۲۰۰۰ نفر کاهش
خواهد داشت. (تقریبی)

مثال: قانون حرکت زره ای بصورت $x(t)=t^2-6t$ می باشد که در آن t زمان بر حسب ثانیه و x مسافت
بر حسب متر است.

الف) سرعت متحرک را پس از ۱۰ ثانیه از شروع حرکت بیابید. ($t=10$)؟

ب) سرعت متوسط میانگین متحرک در ده ثانیه (هم حرکت چقدر است؟



تمرین: در مثال بالا در چه زمانی سرعت متحرک با سرعت متوسط آن در ۱۰ ثانیه دوم مویک است؟



نکته: اگر f تابعی درجه دوم باشد آهنگ متوسط در $[a, b]$ با آهنگ آنی در $\frac{a+b}{2}$ مویک است.

$$\frac{10+20}{2} = 15 \text{ عبارت است از } 15$$

مثال: استخری پر از آب است وقتی شیر تخلیه آن باز می شود حجم آب باقیمانده در استخر بر حسب مترمکعب

$$V = 150 \left(1 - \frac{t}{10}\right)^2$$

بعد از t دقیقه از

الف) بعد از گذشت یک ساعت حجم آب باقیمانده در استخر با چه آهنگی کاهش می یابد؟

تمرین: عدد بدست آمده چه مفهومی دارد؟ یعنی در فاصله زمانی $0 \leq t \leq 60$ یعنی (دقیقه شصت و یکم) حجم آب به اندازه $\frac{7}{8} m^3$ کاهش خواهد داشت (تقریبی)

ب) سرعت میانگین تخلیه حجم آب استخر در فاصله زمانی $t_1=0$ تا $t_2=100$ ؟

ج) در چه زمانی سرعت تخلیه آب با سرعت متوسط آن در صد دقیقه اول مساوی است؟



بهنه سازی

با فرا گرفتن مشتق و کاربرد های آن توانایی پیدا کردن بیشترین و کمترین مقدار توابع را به دست آوریم. از این رو میتوانیم حالت بهینه را در مسائل مربوط به زمان، فاصله و ماحت و... محاسبه کنیم. درخت داشته باشید که:

(۱) در صورت امکان، شکل مناسب برای آن رسم می کنیم و سپس روی شکل، متغیرهای مربوطه را تعریف می کنیم.

(۲) در این گونه مسائل، به طور معمول دو متغیر یا بیشتر وجود دارد که یا در صورت مسئله رابطه ای بین متغیرها هست و یا در شکل که رسم نموده ایم رابطه ای بین متغیرها به وجود می آید. به این رابطه معادله کمکی می گوئیم.

(۳) کمیتی که خواسته شده ماکزیمم یا مینیمم گردد را به صورت y و معادله ثابتی از متغیر مجهول می نویسیم، به این معادله، معادله هدف می گوئیم.

(۴) چنانچه معادله هدف شامل بیش از یک متغیر باشد، با استفاده معادله از معادله کمکی، آن را به صورت تابعی فقط بر حسب یک متغیر تبدیل می کنیم.

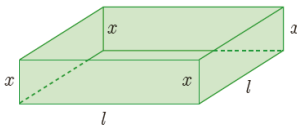
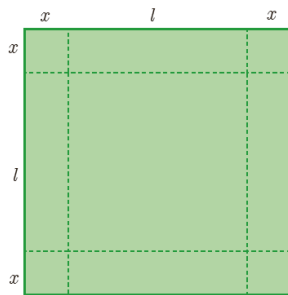
(۵) از معادله به دست آمده (معادله با یک متغیر) مشتق گرفته و نقطه بحرانی را به دست آورده و ماکزیمم یا مینیمم مطلق تابع را به دست می آوریم.





مثال: نشان دهید در تمام متطبیح‌های با محیط ثابت ۱۴ متر، متطبیح بیشترین مساحت را دارد که طول و عرض یک‌نیم داشته باشند؟

مثال: ورق فلزی مربع شکلی به طول ضلع ۳۰ cm را در نظر بگیرید. مطابق شکل میخواهیم از چهار گوشه آن مربع‌های کوچکی به ضلع x برش بزنیم و آن‌ها را کنار بگذاریم. سپس با تا کردن ورق در امتداد خط چین‌های مشخص شده در شکل، یک جعبه دریا بزنیم. مقدار x چقدر باشد تا حجم قوطی حداکثر مقدار ممکن گردد؟



مثال: مجموع دو عدد مثبت ۱۱۰ می باشد، بیشترین مقدار حاصلضرب این دو عدد کدام است؟

۲۴۰۰ (۴)

۲۸۰۰ (۳)

۳۰۰۰ (۲)

۳۰۲۵ (۱)

مثال: مساحت یک متطیل ۲۵ متر مربع می باشد کمترین محیط ممکن برای این متطیل کدام است؟



مثال: نقطه A روی منحنی $y = \sqrt{x}$ در کمترین فاصله از نقطه $(4, 0)$ واقع است. طول این نقطه کدام است؟



مثال ۶: مثلث قائم الزاویه ای با طول وتر ۶ متر داریم. بیشترین مساحت ممکن این مثلث چقدر است؟

مثال: ابعاد متطبیح با بیشترین مساحت را تعیین کنید که دو رأس آن روی محور x ها

و دو رأس دیگرش بالای محور x ها و روی سهمی $y = 12 - x^2$ باشند.

