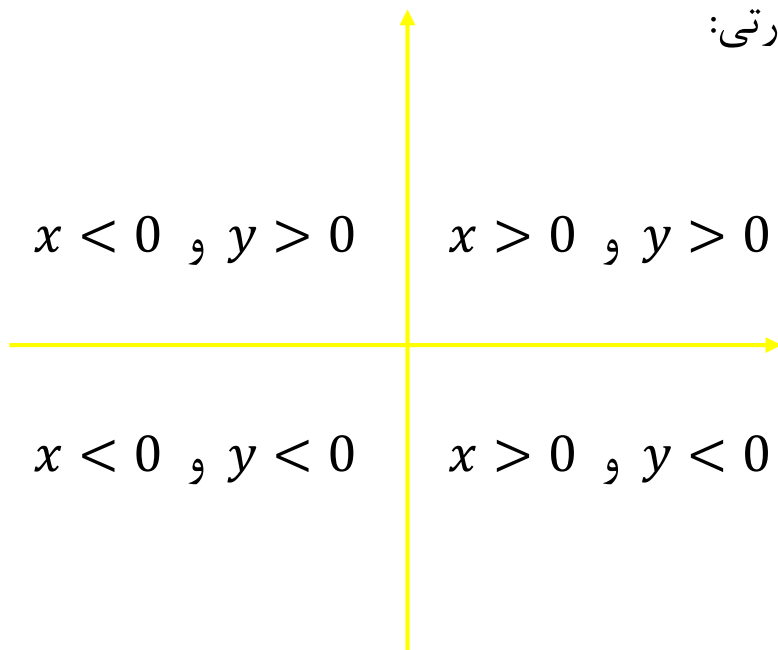


مهندسی

حسن پور

هندسه مختصاتی

دستگاه محورهای مختصات دکارتی:



نکته: اگر نقطه ای روی محور x ها قرار داشته باشد، عرض آن صفر است لذا مختصات آن به صورت $(x, 0)$ است.

نکته: اگر نقطه ای روی محور y ها قرار داشته باشد، طول آن صفر است لذا مختصات آن به صورت $(0, y)$ است.

مثال) اگر نقطه $(\frac{m+1}{2-m}, m-2)$ در ناحیه چهارم محورهای مختصات قرار داشته باشد، آنگاه:

خط :

معادله خط در حالت بسته به صورت $y = mx + h$ است.

$$m = m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \quad \text{و} \quad y - y_A = m(x - x_A)$$

معادله یک خط در حالت گسترده به صورت $ax + by + c = 0$ است که در آن

a و b همزمان صفر نیستند. در این حالت شیب خط $m = -\frac{\text{ضریب } x}{\text{ضریب } y} = -\frac{a}{b}$ و عرض از مبدا آنها برابر $-\frac{c}{b}$ است.

نکته: اگر خطی با جهت مثبت محور x ها زاویه α بسازد، آنگاه $\tan \alpha$ برابر شیب آن خط است.

نکته: اگر خطی موازی محور x ها باشد، شیب آن برابر صفر است و معادله آن به صورت $y = b$ است.

نکته: اگر خطی موازی محور y ها باشد، شیب برای آن تعریف نمی شود و معادله آن به صورت $x = a$ است.

مثال) خطی به شیب $-\frac{4}{3}$ از نقطه $(1,2)$ می گذرد. معادله آن چگونه است؟

نکته: برای پیدا کردن محل برخورد دو خط، معادله آنها را در دستگاه قرار می دهیم و طول و عرض نقطه برخورد را پیدا می کنیم. (هدف حل دستگاه دو معادله و دو مجهول)

مثال) خطی که از دو نقطه $(2,2)$ و $(1,-2)$ می گذرد، خط $x + y = 1$ را در کدام نقطه قطع می کند؟

نکته: معادله نیمساز ناحیه اول و سوم $y = x$ و معادله نیمساز ناحیه دوم و چهارم $y = -x$ است.

نکته: معادله خطی که طول از مبدا آن a و عرض از مبدا آن b است، $(a, b \neq 0)$ به صورت $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ است.

مثال) معادله خطی را بنویسید که عرض از مبدا آن ۵ و طول از مبدا آن ۲- باشد؟

نکته: اگر معادله خط را به ما بدهند برای یافتن طول از مبدا، $(y = 0)$ و برای یافتن عرض از مبدا $(x = 0)$ را در معادله قرار می دهیم.

وضعیت نسبی دو خط:

حالت باز		حالت بسته	
$ax + by + c = 0$	حالت	$y = mx + h$	حالت
$a'x + b'y + c' = 0$		$y = m'x + h'$	
$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$	دو خط منطبق	$m = m' \text{ و } h = h'$	دو خط منطبق
$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$	دو خط موازی	$m = m' \text{ و } h \neq h'$	دو خط موازی
$\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$	دو خط متقاطع	$m \neq m'$	دو خط متقاطع

نکته: حالت خاص از متقاطع بودن: اگر $mm' = -1$ یا $aa' + bb' = 0$ باشد، دو خط بر هم عمود هستند.

مثال) خط گذرنده از نقطه $(1,4)$ و موازی با خط $3x - 2y + 1 = 0$ را بیابید؟

مثال) معادله خطی را بنویسید که از نقطه $(-1, 2)$ گذشته و بر خط $y = \frac{2}{3}x - 1$ عمود باشد؟

نقطه

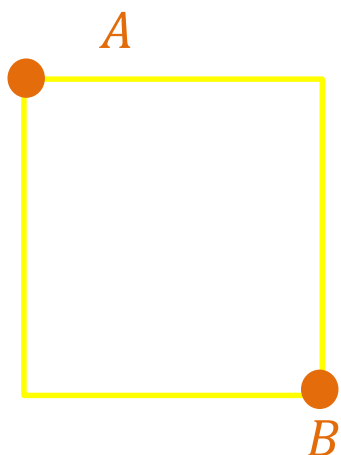
فاصله دو نقطه از هم: فاصله دو نقطه $A: (x_1, y_1)$ و $B: (x_2, y_2)$ از هم برابر است با:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(\text{اختلاف طول ها})^2 + (\text{اختلاف عرض ها})^2}$$

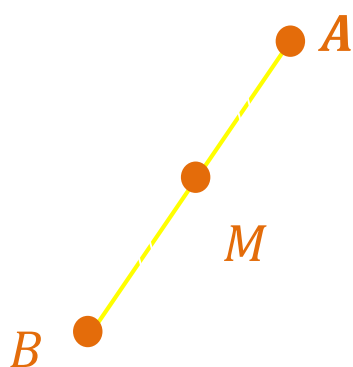
مثال) فاصله بین دو نقطه $A(8, 6)$ و $B(4, 3)$ را بیابید؟

مثال) فاصله نقطه $A(-6, 8)$ تا مبدا را بیابید؟

مثال) اگر نقاط $A(3, -2)$ و $B(0,4)$ دو راس متقابل یک مربع باشند، مساحت مربع را بیابید؟



نقطه وسط پاره خط:



$$AM = MB$$

$$M \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right)$$

مثال) اگر دو سر قطر دایره ای $A(2, -1)$ و $B(4,7)$ باشد، مرکز این دایره تا مبدا چقدر فاصله دارد؟

مثال) مثلثی با رئوس $A(2,1)$ و $B(3,4)$ و $C(5,0)$ مفروض است.

الف) مختصات نقطه وسط BC (M) را بیابید؟

ب) طول میانه AM را بیابید؟

ج) معادله میانه AM را بیابید؟

نکته: محل تلاقی سه میانه مثلث را مرکز ثقل مثلث می نامیم. اگر $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ و $C(x_C, y_C)$ سه رأس مثلث و G مرکز ثقل آن باشد، آنگاه:

$$G = \frac{A+B+C}{3} = \left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3}, \frac{y_A+y_B+y_C}{3} \right)$$

چند نکته در مورد قرینه یک نقطه نسبت به نقطه دیگر:

تعریف: اگر نقطه A را به نقطه M وصل کنیم و به همان اندازه امتداد دهیم تا به نقطه A' برسیم، آنگاه نقطه A' قرینه نقطه A نسبت به نقطه M است.

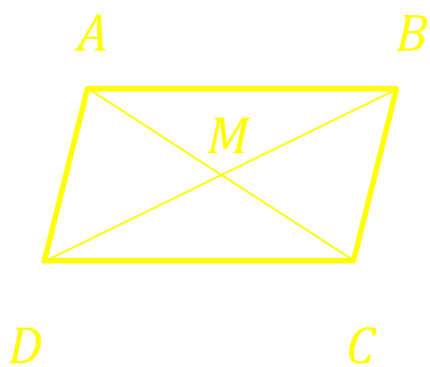
۱- اگر A' قرینه نقطه A نسبت به نقطه M باشد، آنگاه M وسط پاره خط AA' قرار دارد.

$$M = \frac{(A+A')}{2} \rightarrow A' = 2M - A$$

۲- قرینه نقطه $A(a, b)$ نسبت به مبدا محور مختصات نقطه $A'(-a, -b)$ است زیرا نقطه O مبدا مختصات وسط پاره خط AA' است.

(مثال) قرینه نقطه $A(2,3)$ نسبت به نقطه $M(2,1)$ کدام است؟

نکته: اگر چهارضلعی $ABCD$ یک متوازی الاضلاع باشد، (مربع، مستطیل و لوزی حالاتی خاص از متوازی الاضلاع هستند) قطرهایش یکدیگر را نصف می کنند.



$$M = \frac{A+C}{2} = \frac{B+D}{2}$$

(مثال) اگر $A(1,2)$ و $B(2,0)$ و $C(2,-3)$ راس های متوازی الاضلاع $ABCD$ باشند، مختصات راس چهارم را بیابید؟

عمودمنصف

مثال) معادله عمودمنصف پاره خط $A(3,4)$ و $B(-1,2)$ را بیابید؟

مثال) قرینه نقطه $A(3, -5)$ را نسبت به خط $L: 2x - 4y = 6$ بیابید؟

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

فاصله نقطه از خط:

مثال) فاصله نقطه $(2, -1)$ را از خط $3x - 4y = 2$ بیابید؟



نکته: فاصله مبدا مختصات از خط $ax + by + c = 0$ برابر است با: $d = \frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$



مثال) مساحت مربعی که یک رأس آن $(-2,1)$ و یک ضلع آن روی خط $3x + 4y = 1$ قرار دارد را بیابید؟



مثال) مساحت مثلث ABC با رأس های $A(-3,2)$ و $B(2,0)$ و $C(1,4)$ را بیابید؟



مثال) شعاع دایره به مرکز $O(+2,3)$ و مماس بر خط به معادله $3x - 4y = 4$ را بیابید؟



فاصله بین دو خط موازی: برای به دست آوردن فاصله دو خط موازی به معادلات

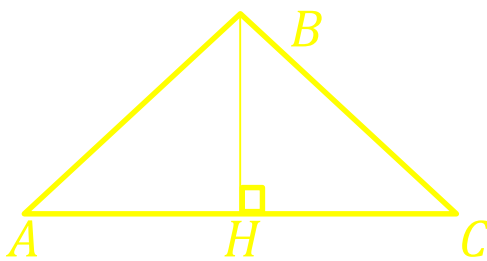
$ax + by + c = 0$ و $ax + by + c' = 0$ از رابطه $d = \frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ استفاده می کنیم.

مثال) فاصله دو خط $3x - 4y - 1 = 0$ و $6x - 8y + 5 = 0$ را بیابید؟

مثال) مثلث با سه رأس $A(1,4)$ و $B(-2,-2)$ و $C(4,2)$ مفروض است.

الف) معادله ارتفاع BH را محاسبه کنید؟

ب) طول ارتفاع BH را بیابید؟



تست

۱- سه ضلع مثلث به معادلات $AB: 2y - x = 3$ و $AC: y - 2x = 5$ و $BC: 2y + 3x = 6$ مفروض اند. معادله ارتفاع AH از مثلث مفروض کدام است؟ (تجربی خارج ۸۹)

$$(۱) \quad 6y - 4x = 15$$

$$(۲) \quad 9y - 6x = 17$$

$$(۳) \quad 3y - 2x = 7$$

$$(۴) \quad 3y + 2x = 9$$

۲- معادله سه ضلع یک مثلث $x + y = 1$ و $y = 2x$ و $x = 1$ است. معادله خطی که کوچکترین ارتفاع این مثلث بر آن قرار دارد کدام است؟

$$(۱) \quad y = \frac{2}{3}$$

$$(۲) \quad x = \frac{2}{3}$$

$$(۳) \quad y + x = \frac{2}{3}$$

$$(۴) \quad y + x = \frac{1}{3}$$

۳- مثلث ABC با رئوس $A(1,2)$ و $B(2,5)$ و $C(4,1)$ چگونه است؟

(۱) متساوی الاضلاع

(۲) متساوی الساقین

(۳) قائم الزاویه متساوی الساقین

(۴) قائم الزاویه

۴- اگر مسافت فیزیکی هر درجه طول و عرض جغرافیایی ۱۱۰ کیلومتر و طول و عرض جغرافیایی شهر A به ترتیب 45° و 37° و طول و عرض جغرافیایی شهر B به ترتیب 37° و 31° باشد، فاصله دو شهر A و B چند کیلومتر است؟ (۱) ۹۹۰ (۲) ۱۱۰۰ (۳) ۸۸۰ (۴) ۷۷۰

۵- نقطه $A(7,6)$ راس یک متوازی الاضلاع است که دو ضلع آن منطبق بر خطوطی به معادلات $2y - 3x = 11$ و $3y + 4x = 8$ هستند. مختصات وسط قطر آن کدام است؟ (تجربی ۹۰)

(۱) (1,5)

(۲) (3,4)

(۳) (3,5)

(۴) (4,3)

۶- نقطه $A(3, -1)$ وسط قطر مربعی است که یک ضلع آن منطبق بر خط به معادله $2y - x = 5$ است. مساحت این مربع کدام است؟ (تجربی خارج ۹۳) (۱) ۴۵ (۲) ۴۰ (۳) ۷۵ (۴) ۸۰

۷- دو ضلع یک مستطیل بر دو خط به معادلات $2x - y = 7$ و $2y + x = 6$ منطبق اند و یک راس آن نقطه $A(8,5)$ است. مساحت این مستطیل کدام است؟ (تجربی خارج ۹۰)

(۱) $7/2$

(۲) $9/6$

(۳) $11/4$

(۴) $12/8$

۸- فاصله مبدا مختصات از خط $2y = mx + b$ گذرنده از نقطه $(1,2)$ برابر ۱ است. m کدام است؟

(۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $-\frac{3}{2}$ (۴) $-\frac{2}{3}$

۹- فاصله نقطه ای واقع بر نیمساز ناحیه دوم از خط به معادله $3y - 2x + 4 = 0$ برابر $3\sqrt{13}$ است. عرض این نقطه کدام است؟ (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸

۱۰- دو نقطه روی خط به معادله $y = x - 1$ قرار دارند که فاصله این نقاط از خط به معادله $2x - 3y = 5$ برابر $\sqrt{13}$ است. طول این نقاط کدام است؟

(۱) ۹ و -۱۵

(۲) ۱۱ و -۱۵

(۳) -۱۱ و +۱۵

(۴) ۱۱ و -۹

۱۱- دو ضلع یک مربع منطبق بر دو خط به معادلات $2x - 2y = 3$ و $y = x + 1$ هستند.

مساحت این مربع کدام است؟ (۱) $\frac{9}{8}$ (۲) $\frac{9}{4}$ (۳) $\frac{25}{8}$ (۴) $\frac{25}{4}$

۱۲- اضلاع مثلثی منطبق بر سه خط به معادلات $y + 2x = 16$ و $2y - x = 2$ و $y = 0$ هستند. اندازه میانه نظیر ضلع افقی این مثلث، در صفحه ی مختصات کدام است؟

(۱) $2\sqrt{5}$

(۲) ۵

(۳) $3\sqrt{3}$

(۴) ۶

۱۳- مثلثی با راس های $A(1,5)$ و $B(7,3)$ و $C(2,-2)$ مفروض است. اندازه ارتفاع AH در مثلث ABC کدام است؟ (۱) 4 (۲) $3\sqrt{2}$ (۳) 5 (۴) $4\sqrt{2}$