



## مجموعه ها

مجموعه های معروف و کاربرد:

۱- مجموعه اعداد طبیعی:  $N = \{1, 2, 3, \dots\}$

۲- مجموعه اعداد حسابی:  $W = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

۳- مجموعه اعداد صحیح:  $Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

۴- مجموعه اعداد گویا:  $Q = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in Z, n \neq 0 \right\}$

۵- مجموعه اعداد گنگ: اعدادی که گویا نیستند را گنگ (اصم) می گوئیم و آن را با نماد  $Q^c$  یا  $Q'$  نمایش می دهیم.

به عبارتی اعداد گنگ اعدادی هستند که نمی توانیم آنها را به صورت کسری نمایش دهیم.

معروف ترین این اعداد عبارتند از:  $\pi$  و  $e$  و  $\pm\sqrt{k}$  اگر  $k$  مربع کامل نباشد.

۶- مجموعه اعداد حقیقی: بزرگترین مجموعه اعداد که تا اینجا می شناسیم و شامل تمام اعداد گویا و گنگ است.  $R = Q \cup Q'$

به عبارتی دیگر:  $(R - Q = Q'$  یا  $R - Q' = Q)$

نکته: سیر تکامل اعداد:

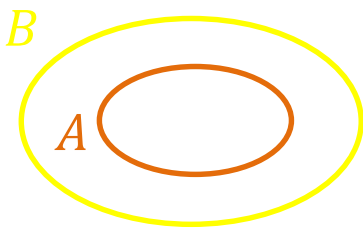
اعداد طبیعی  $\xrightarrow{\text{صفر اضافه شود}}$  اعداد حسابی  $\xrightarrow{\text{قرینه اعداد طبیعی اضافه شود}}$  اعداد صحیح  $\xrightarrow{\text{حاصل تقسیم دو عدد صحیح}}$  اعداد گویا  $\xrightarrow{\text{اعداد گنگ اضافه شود}}$  اعداد حقیقی

نکته: عضویت یک شی در یک مجموعه را با نماد  $\in$  و عدم عضویت آن را با نماد  $\notin$  بیان می کنیم.

مجموعه تهی: مجموعه ای را که هیچ عضوی نداشته باشد، مجموعه تهی می گویند و آن را با نماد  $\emptyset$  یا  $\{\}$  نمایش می دهند.

زیرمجموعه:

اگر  $A$  و  $B$  دو مجموعه باشند به طوری که هر عضو  $A$  عضو  $B$  نیز باشد، در این صورت می گوئیم  $A$  زیرمجموعه  $B$  است و می نویسیم:  $A \subset B$ .



نکات زیرمجموعه:

۱- هر مجموعه زیرمجموعه خودش است.  $A \subset A$

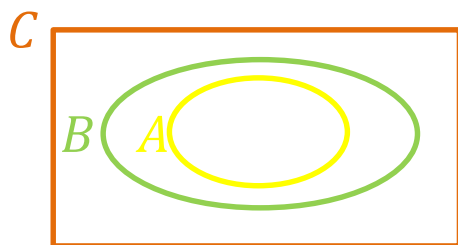
۲- تهی زیرمجموعه هر مجموعه است.  $\emptyset \subset A$

۳- تهی فقط یک زیرمجموعه دارد و آن هم تهی است.  $\emptyset \subset \emptyset$

۴- باتوجه به مفهوم زیرمجموعه بودن بین مجموعه اعداد رابطه مقابل برقرار است:

$$N \subset W \subset Z \subset Q \subset R$$

۵- اگر  $A \subset B$  و  $B \subset C$  باشد آنگاه  $A \subset C$ .



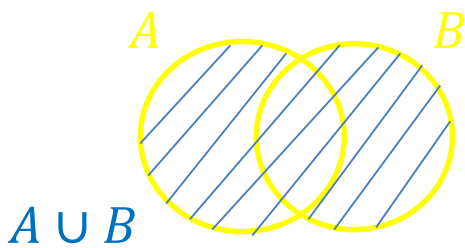
۶- تعداد زیرمجموعه های  $r$  عضوی از یک مجموعه  $n$  عضوی برابر است با  $\binom{n}{r}$ .

۷-مجموع تمام زیرمجموعه های یک مجموعه  $n$  عضوی برابر است با:

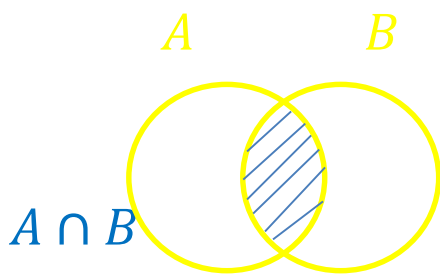
$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$

اشتراک و اجتماع دو مجموعه:

اجتماع دو مجموعه: اجتماع دو مجموعه  $A$  و  $B$  که به صورت  $A \cup B$  نشان داده می شود مجموعه ای است که هر عضو آن متعلق به مجموعه  $A$  یا  $B$  و یا هر دو مجموعه می باشد.



اشتراک دو مجموعه: اشتراک دو مجموعه  $A$  و  $B$  به صورت  $A \cap B$  نشان داده می شود. مجموعه ای است که هر عضو آن هم در  $A$  و هم در  $B$  موجود باشد.



نکته: هم  $A$  و هم  $B$  (هر دو با هم) یعنی  $A \cap B$ .

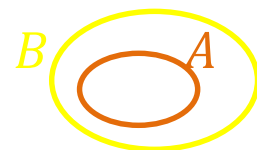
قوانین:

1)  $A \cup B = B \cup A$  و  $A \cap B = B \cap A$  (خاصیت جابجایی)

2)  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$  (خاصیت شرکت پذیری)

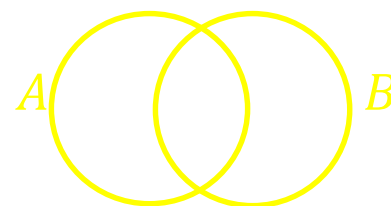
3)  $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A \xrightarrow{\text{نتیجه}} \begin{cases} A \cap \emptyset = \emptyset \cap A = \emptyset \\ A \cap A = A \end{cases}$



4)  $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B \xrightarrow{\text{نتیجه}} \begin{cases} A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A \\ A \cup A = A \end{cases}$

5)  $A \cap B \subset \begin{matrix} A \\ B \end{matrix} \subset A \cup B$

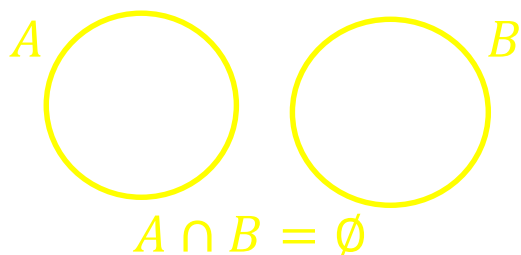
6)  $A \cup (A \cap B) = A$  و  $A \cap (A \cup B) = A$  قوانین جذب



7)  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$  (خاصیت پخشی اجتماع روی اشتراک)

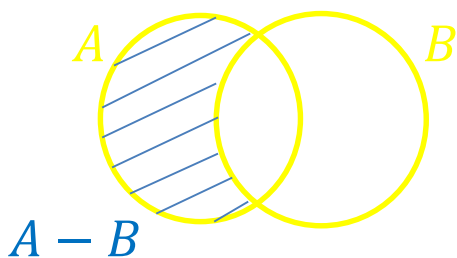
8)  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$  (خاصیت پخشی اشتراک روی اجتماع)

دو مجموعه مجزا یا جدا از هم: دو مجموعه ناتهی را که اشتراک آنها مجموعه تهی است مجزا یا جدا از هم می گوییم.



به عنوان مثال مجموعه اعداد گنگ و مجموعه اعداد اول زوج دو مجموعه مجزا هستند.

تفاضل مجموعه ها: تفاضل مجموعه  $B$  از  $A$  که به صورت  $A - B$  نمایش داده می شود مجموعه ای است که اعضای آن عضو  $A$  هستند ولی عضو  $B$  نیستند.



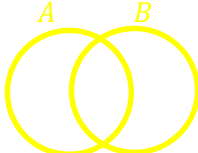
مثال) اگر  $A = \{a, b, c, d, e\}$  و  $B = \{a, d, e\}$  باشد  $A - B$  کدام است؟

قوانین تفاضل مجموعه ها: اگر  $A$  و  $B$  هر کدام دو مجموعه دلخواه ناتهی باشند آنگاه:

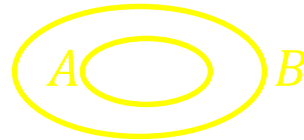
$$1) A - A = \emptyset$$

$$2) A - \emptyset = A$$

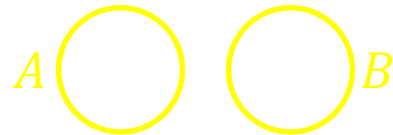
$$3) \emptyset - A = \emptyset$$

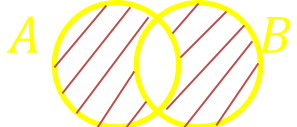
$$4) \begin{cases} A - B \subset A \\ B - A \subset B \end{cases}$$


$$5) \begin{cases} A \subset B \rightarrow A - B = \emptyset \\ A - B = \emptyset \rightarrow A \subset B \end{cases}$$



$$6) A \cap B = \emptyset \rightarrow \begin{cases} A - B = A \\ B - A = B \end{cases}$$



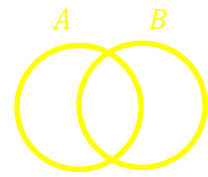
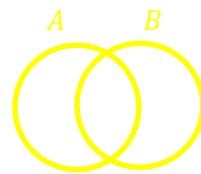
$$7) (A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$$


$$8) (A - B) \cap (B - A) = \emptyset$$

$$9) A - B \neq B - A$$

$$10) \begin{cases} A = B \rightarrow A - B = B - A = \emptyset \\ A - B = B - A \rightarrow A = B \end{cases}$$

دو رابطه مهم:



$$1) B - A = B - (A \cap B)$$

$$2) (A \cup B) - B = A - B$$

مجموعه های متناهی و نامتناهی:

اگر  $A$  مجموعه ای با  $n$  عضو باشد آن را مجموعه متناهی ( $n$  عضوی) می نامیم اما وقتی تعداد اعضای  $A$  محدود نباشد آن را نامتناهی می نامیم.

تذکر: ممکن است تعداد اعضای  $A$  خیلی خیلی زیاد باشد به طوری که شمردن آنها برای ما سخت یا غیرممکن باشد ولی در کل مجموعه متناهی باشد مانند اتم های کره زمین، درختان جنگل آمازون و ... دارای تعداد بسیار زیادی عضو هستند اما اعضایشان محدود است.

مجموعه های نامتناهی در کتاب درسی:

۱- هندسی: مجموعه تمام دایره ها به مرکز مبدا، تمام خطوط با شیب ۳ و ...

۲- بازه های حقیقی گویا و گنگ: تمام بازه ها نامتناهی اند چون تعداد اعضایشان نامحدود است. اعداد گویا و گنگ در هر بازه نامتناهی اند چون بین هر دو تایی آنها بی شمار عدد دیگر وجود دارد.



۳- دارای اعضای بزرگ یا کوچک که تا  $-\infty$  یا  $+\infty$  می رسند: مجموعه اعداد  $N$  و  $Z$  و  $W$ ، اعداد اول، مضارب ۵ و ... از این گروه هستند.

نکته: اگر مجموعه  $A$  متناهی باشد تمام زیر مجموعه های آن نیز متناهی اند و اشتراک  $A$  با هر مجموعه دیگر نیز حتما متناهی است.

نکته: اگر مجموعه  $B$  نامتناهی باشد هم زیرمجموعه متناهی و هم زیرمجموعه نامتناهی دارد و اجتماع  $B$  با هر مجموعه دیگر نامتناهی است اما در مورد اشتراک با مجموعه های دیگر نمی توان نظری داد. جالب است بدانید اگر  $B$  نامتناهی باشد و  $B \subset C$  آنگاه  $C$  حتما نامتناهی است.

نکته: اگر دو مجموعه  $A$  و  $B$  داشته باشیم که نامتناهی باشند امکان دارد  $A \subset B$  یا  $B \subset A$  باشد،  $B - A$  یا  $A - B$  یک، دو و ... عضوی باشند و یا امکان دارد  $A \cap B$  تهی، تک عضوی، دو عضوی و ... باشد اما  $A \cup B$  حتما نامتناهی است.

مثال) اگر  $A$  متناهی و  $B$  نامتناهی باشد وضعیت مجموعه های زیر چگونه است؟

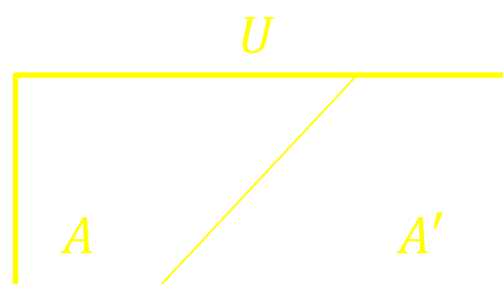
الف)  $A \cap B$       ب)  $B - A$       ج)  $A - B$       د)  $A \cup B$

مجموعه مرجع: مجموعه ای است که کل فضای مسئله را نمایش می دهد و تمام مجموعه های موجود زیرمجموعه آن هستند.

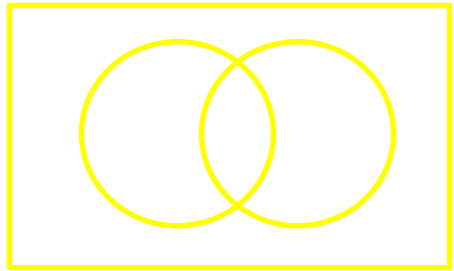
هر مجموعه مانند  $A$  زیرمجموعه مرجع است یعنی:  $A \subset U$ .

تعریف متمم: هرگاه  $U$  مجموعه مرجع باشد و  $A \subset U$  آنگاه مجموعه  $U - A$  را متمم  $A$  می نامیم و آن را با نماد  $A'$  نمایش می دهیم به عبارت دیگر  $A'$  شامل عضوهایی از  $U$  است که در  $A$  نیستند.

$$A' = U - A = \{x | x \notin A\}$$







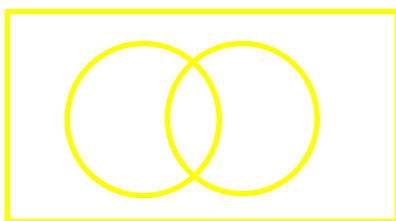




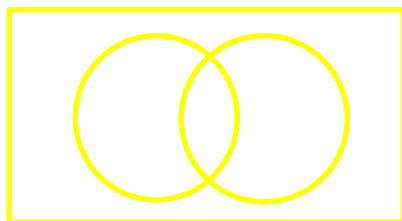
## تمرین

۱- از ۵۱ دانش آموز یک مدرسه، ۳۵ نفر در کلاس ادبیات و ۳۱ نفر در کلاس عربی شرکت کرده اند و ۸ نفر در هیچ یک از دو کلاس شرکت نکرده اند. مطلوب است محاسبه:

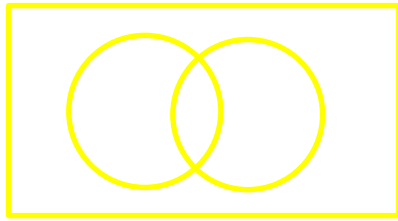
الف) چند نفر در هر دو کلاس شرکت کرده اند؟



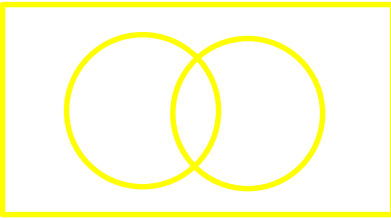
ب) چند نفر در کلاس ادبیات شرکت کرده اند ولی در کلاس عربی شرکت نکرده اند؟



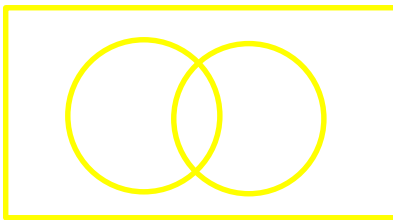
۲- در یک نظرسنجی ۲۰۰ نفری معلوم شده ۱۲۰ نفر علاقمند به دیدن فوتبال و ۱۵۰ نفر علاقمند به دیدن سریال اند. اگر ۴۰ نفر علاقمند به دیدن فوتبال باشند ولی علاقمند به دیدن سریال نباشند مطلوب است محاسبه:



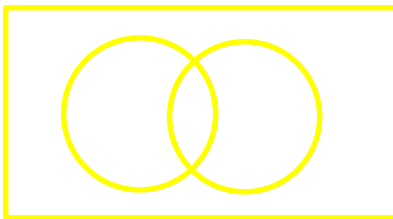
الف) چند نفر هر دو برنامه را دیده اند؟



ب) چند نفر حداقل یکی از دو برنامه را دیده اند؟



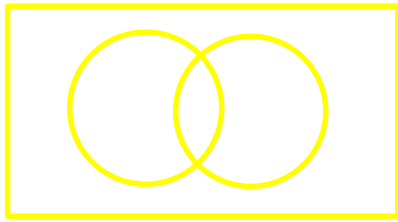
ج) چند نفر به دیدن فوتبال و سریال علاقمند نیستند؟



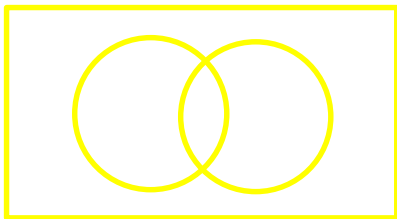
د) چند نفر دقیقا یکی از دو برنامه را دیده اند؟



۳-در یک کلاس ۴۰ نفره، ۲۱ نفر عضو تیم فوتبال و ۱۷ نفر عضو تیم والیبال و ۵ نفر عضو هر دو تیم هستند.



الف) چند نفر عضو حداقل یکی از این دو تیم هستند؟



ب) چند نفر عضو هیچ یک از این دو تیم نیستند؟

۴-در یک کلاس ۳۹ نفری، ۱۶ نفر در گروه ورزش، ۱۲ نفر در گروه روزنامه دیواری و ۹ نفر فقط در گروه ورزش هستند. چند نفر آنان عضو هیچ یک از این دو گروه نیستند؟ (ریاضی ۹۸) (۱)

۱۵ (۲) ۱۶ (۳) ۱۷ (۴) ۱۸

۵-در یک کلاس ۴۲ نفری، ۱۵ نفر عضو گروه آزمایشگاهی و ۱۲ نفر عضو گروه فوتبال و ۷ نفر عضو هر دو گروه هستند. چند نفر آنان عضو هیچ یک از این دو گروه نیستند؟ (ریاضی ۹۸) (۱)

۱۵ (۲) ۱۸ (۳) ۲۱ (۴) ۲۲