مشتق

قواعد مشتق گیری :

1) $y = c \quad \rightarrow \quad y' = 0$

2) $y = x^n \quad \rightarrow \quad y' = nx^{n-1}$

3) $y = ax \quad \rightarrow \quad y' = a$

4) $y = f(x) \pm g(x) \quad \rightarrow \quad y' = f'(x) \pm g'(x)$

5) $y = af(x) \quad \rightarrow \quad y' = af'(x)$

6) $y = f(x) \times g(x) \quad \rightarrow \quad y' = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$

7) $y = \frac{f(x)}{g(x)} \quad \rightarrow \quad y' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}$

8) $y = \frac{u}{a} \quad \rightarrow \quad y' = \frac{u'}{a}$

9) $y = \sin u \quad \rightarrow \quad y' = u' \cos u$

10) $y = \cos u \quad \rightarrow \quad y' = -u' \sin u$

11) $y = \tan u \quad \rightarrow \quad y' = u'(1 + \tan^2 u)$

12) $\mathrm{y} = \cot u \quad \rightarrow \quad y' = -u'(1 + \cot^2 u)$

13) $y = \sqrt{u} \quad \rightarrow \quad y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

14) $y = \sqrt[m]{u^n} \quad \rightarrow \quad y' = \frac{nu'}{m\sqrt[m]{u^{m-n}}}$

$y = \sqrt[5]{x^3}$

$y = \sqrt[7]{(x^2 + x)^3}$

15) $y = u^n \quad \rightarrow \quad y' = nu^{n-1}u'$

$y = (3x + x^2)^6$

$y = \sin^3 x$

$y = \left(\sqrt{x^2 + 5x}\right)^3$

$y = \left(\frac{x^2+3}{x^2+4x}\right)^5$

16) $y = \frac{au+b}{cu+d} \rightarrow y' = \frac{ad-bc}{(cu+d)^2}u'$

$$y = \frac{3x-1}{2x+5}$$

$$y = \frac{3+2\sin x}{\sin x+4}$$

17) $y = \frac{a}{x^n} \rightarrow y' = \frac{-an}{x^{n+1}}$

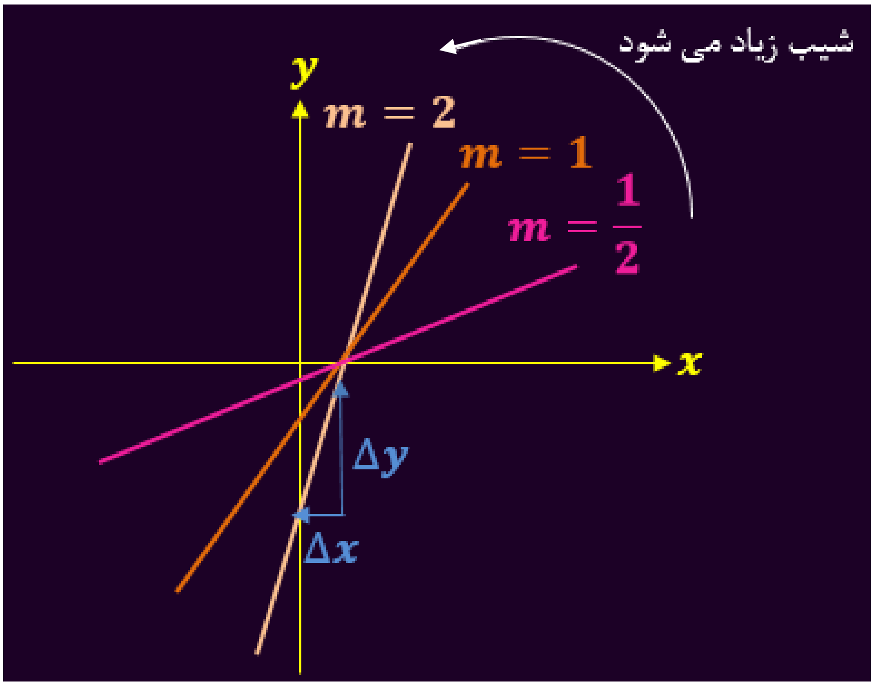
مثال) مشتق تابع زیر را بیابید؟

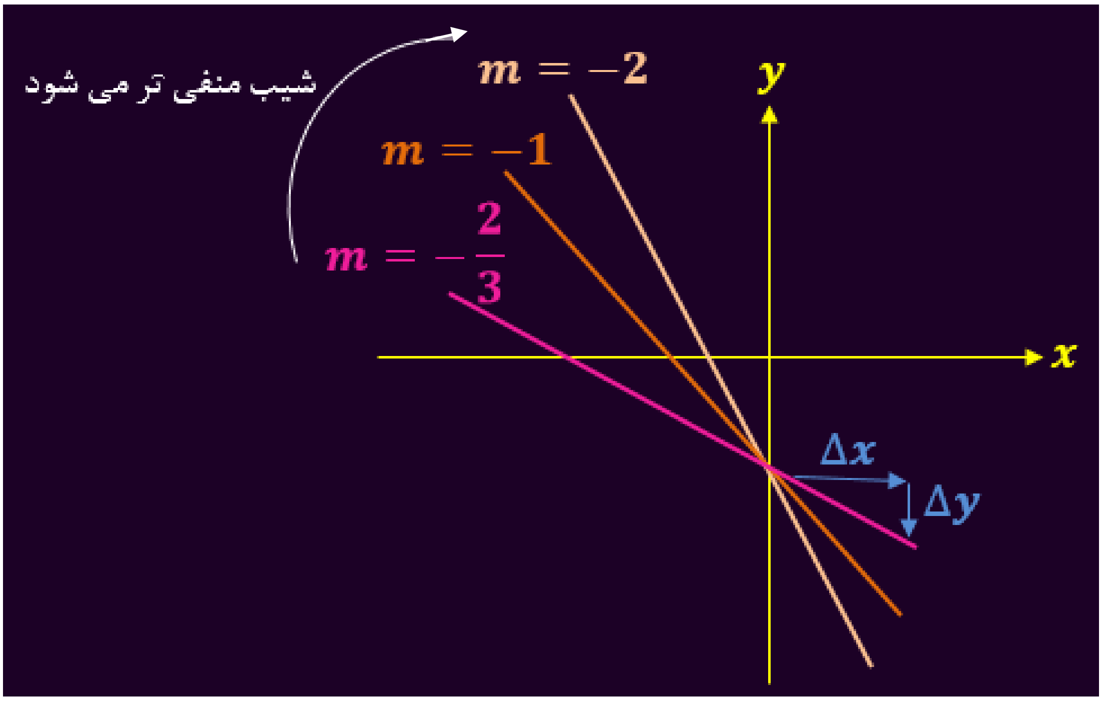
$$y = \sin^5\left(\tan\sqrt{\frac{5}{x^3}}\right)$$

آشنایی با مفاهیم مشتق

شیب: شیب در واقع ضریب افزایش یک متغیر بر حسب یک متغیر دیگر است.

$$m = \frac{\text{تغییرات عمودی}}{\text{تغییرات افقی}} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

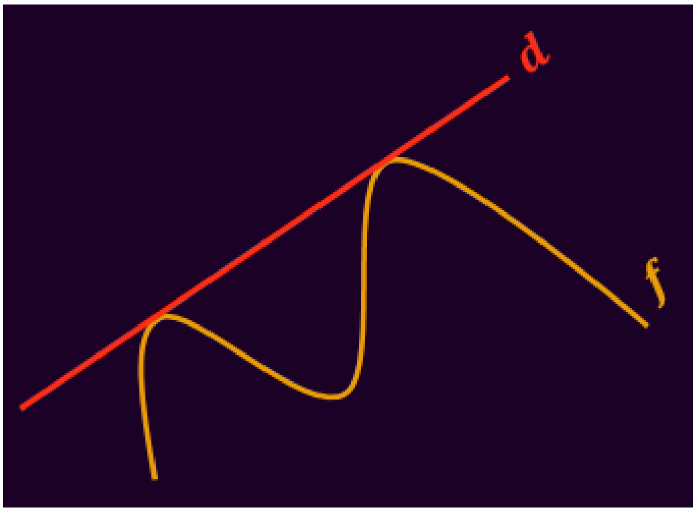


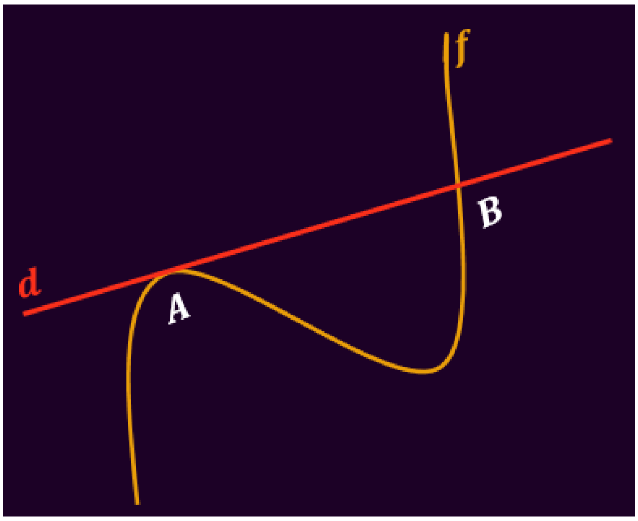


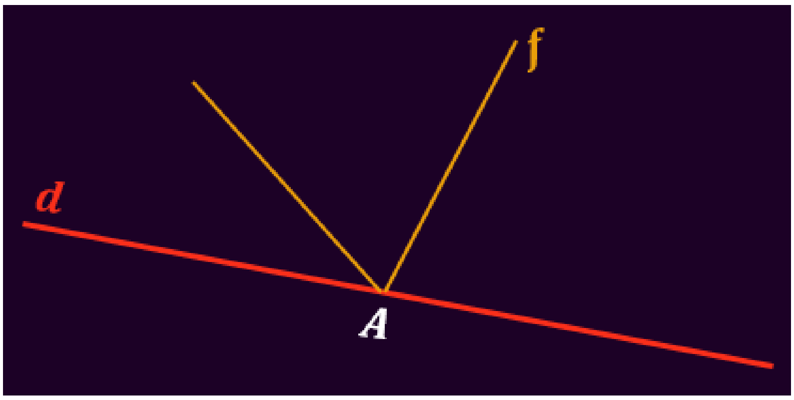
شیب خط اگر صفر باشد خط موازی محور x هاست.

شیب خط تعریف نشده است اگر خط موازی محور y ها باشد.

خط مماس بر منحنی:







تعریف مشتق

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \qquad f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

شکل پیچیده تعریف مشتق: به دلیل اینکه تعریف مشتق یک واحد از نوع $\frac{0}{0}$ است می توانیم در محاسبه حد خواسته شده از قانون Hop استفاده کنیم.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+mh)-f(a+nh)}{kh}=\frac{m-n}{k}f'(a)$$

مشتق چپ و راست

مشتق راست:

$$f'_{+}(a)=\lim_{x\to a^{+}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{h\to 0^{+}}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

$$f'_{-}(a)=\lim_{x\to a^{-}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{h\to 0^{-}}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

نتیجه مهم ۱: مشتق پذیری یک تابع در یک نقطه درونی مانند a، معادل با آن است که مشتق های چپ و راست در آن نقطه موجود و با هم برابر باشند. برای تابع مانند f با دامنه ی محدود $[a,b]$، مشتق پذیری f در a به معنای وجود مشتق راست f در a و مشتق پذیری f در b به معنای وجود مشتق چپ f در b است.

نتیجه مهم ۲: وقتی مشتق چپ (راست) در یک نقطه وجود دارد، مماس چپ (راست) در آن نقطه وجود دارد.

رابطه مشتق پذیری و پیوستگی

قضیه: اگر تابع f در نقطه ی a مشتق پذیر باشد، آنگاه f در a پیوسته است.

f در a پیوسته است $\longrightarrow$ f در نقطه ی a مشتق پذیر باشد

f در a مشتق ناپذیر است $\longrightarrow$ f در نقطه ی a ناپیوسته باشد

نتیجه مهم برای حل تست ها: اگر تابع f در نقطه ی درونی a مشتق پذیر باشد، آنگاه دو شرط زیر برقرار است:

$$1)\quad j\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$$

$$2)\quad f'_-(a) = f'_+(a) =$$

تعبیر هندسی مشتق چپ و راست:

شیب نیم مماس راست برابر است با $f'_+(a) = \tan\theta$.

شیب نیم مماس چپ برابر است با $f'_-(a) = \tan\beta$.

تعبیر هندسی مشتق:

شیب برابر است با $f'(a) = \tan\alpha$.

مشتق توابع دارای عامل صفر کننده

فرض کنید تابع $f(x) = g(x)h(x)$ در همسایگی $x = a$ تعریف شده باشد، و توابع g و h در $x = a$ مشتق پذیر باشند، و $g(a) = 0$ باشد، در اینصورت $f'(a) = g'(a)h(a)$.

در این حالت $g(a)$ را عامل صفرکننده می نامیم. برای محاسبه $f'(a)$ کافی است فقط از عامل صفرکننده مشتق بگیریم و بقیه تابع را همانطور که هست بنویسیم و عددگذاری کنیم.

مثال) اگر $f(x) = (x^2 - 1)\sqrt{\frac{9x}{x+3}}$ ، حاصل $f'(1)$ را بیابید؟

مثال) اگر $f(x) = x(x-1)(x-2)\ldots(x-50)$ ، حاصل $f'(0)$ را بیابید؟

مشتق گیری و ساده سازی

در محاسبه مشتق بعضی از توابع جبری، می توان به کمک (اتحادها، فاکتورگیری، گویا کردن، تجزیه کسرها، روابط مثلثاتی) عبارت را به شکل ساده تری تبدیل نموده، سپس مشتق را محاسبه می کنیم.

مثال) مشتق توابع زیر را بیابید؟

1) $y=\frac{x-\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$

2) $y=(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1)$

نکته: در بعضی موارد، مشتق یک عبارت خاص مدنظر سوال است، در اینگونه موارد ابتدا آن عبارت را می سازیم، سپس از آن مشتق می گیریم. به عنوان مثال:

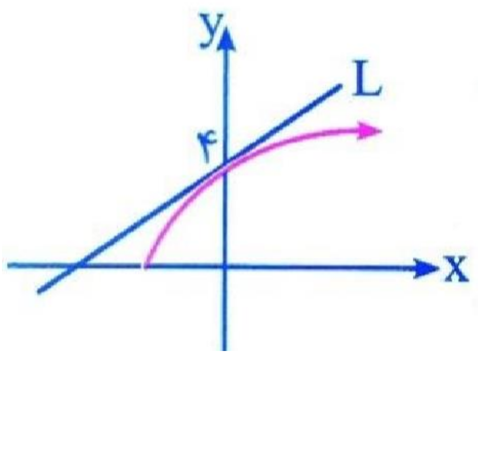
1) $(f \times g)' = f'g + g'f$ 2) $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$

3) $(f^2 + g')' = 2ff' + g''$ 4) $(f'g)' = f''g + g'f'$

مثال) اگر $f(x) = \left(\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1}\right)^2$ و $g(x) = \left(\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1}\right)^2$، آنگاه حاصل $f'g + g'f$ را بیابید؟

تست

۱-نمودار تابع f داده شده است. اگر $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{1}{3}$ باشد، خط L محور x ها را با کدام طول قطع می کند؟ ۱) ۶- ۲) ۹- ۳) ۱۰- ۴) ۱۲-



۱.