

گراف

مقدمات گراف و گراف بازه ها

گراف: عبارت است از تعدادی نقطه که بعضی یا همه ی آن ها توسط پاره خط ها (یا کمان هایی) به هم وصل شده اند. نقاط را راس و خطوط را یال می نامند.

راس و یال: در گراف $G = (V, E)$ مجموعه ی V ، راس های گراف و مجموعه ی E ، مجموعه ی یال های گراف است.

دو راس مجاور: دو راس متمایز a و b را مجاور می نامند هرگاه یالی بین آن ها موجود باشد.

درجه راس: به تعداد یال هایی که به یک راس از گراف متصل هستند درجه ی آن راس گفته می شود و با $\deg V_i$ نشان می دهند.

راس زوج و راس فرد: اگر درجه ی یک راس از گراف عددی زوج باشد، آن راس را، راس زوج و اگر فرد باشد، راس فرد می نامند.

Δ, δ : بزرگترین عدد در بین درجه ی راس های یک گراف را Δ و کوچکترین درجه ی راس های یک گراف را δ می دهند و هم چنین کوچکترین درجه در بین تمام درجه ها را δ می نامند و با Δ نشان می دهند.

مرتبه: به تعداد راس های گراف، مرتبه گراف گفته می شود و با P نشان می دهند.

اندازه: به تعداد یال های یک گراف، اندازه ی گراف گفته می شود و با q نشان می دهند.

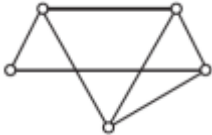
قضیه: در هر گراف ساده با اندازه q و مرتبه p داریم:

$$0 \leq q \leq \frac{p(p-1)}{2}$$

گراف بازه ها : اگر بازه های باز و متمایز از اعداد حقیقی را به عنوان راس های گراف در نظر بگیریم و دو راس را با این شرط مجاور کنیم که بازه های آن دارای اشتراک باشند ، گراف حاصل را گراف بازه ها می نامند .

تخصیص گراف بازه ها : اگر در یک گراف ، n ضلعی بدون قطر ($n \geq 4$) موجود باشد گراف ، متناظر با بازه ها نیست .

مثال : دو راس متناظر با بازه های (a, b) و (c, d) از اعداد حقیقی مجاورند به شرط آن که اشتراک این دو بازه تهی نباشد . گراف مقابل به چند طریق متناظر با بازه ها است ؟



۱ (۱)

۲ (۲)

۴ (۴) نشدنی

۳ (۳)

قضیه ۱ اساس گراف و نتایج:

قضیه: در هر گراف ساده $G = (V, E)$ اگر $V = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ باشد آنگاه داریم:

$$\sum \deg v_i = 2q$$

مثال: در گرافی که ۱۶ رأس دارد، تعداد رأس های زوج عددی و تعداد رأس های فرد عددی است.

(۱) فرد - فرد

(۲) فرد - زوج

(۳) زوج - فرد

(۴) زوج - زوج

تخیص دنباله گراف

برای تشخیص دنباله گراف به نکات زیر توجه کنید :

- (۱) ابتدا جمله های صفر را از دنباله کنار می گذاریم.
 - (۲) در گراف از مرتبه p ، بزرگترین عدد دنباله حداکثر باید $p-1$ باشد.
 - نتیجه: حداقل دو جمله از دنباله گراف باید یکان باشد.
 - (۳) تعداد اعداد فرد در دنباله باید زوج باشد.
 - (۴) اگر در گراف از مرتبه p ، یک راس درجه $p-1$ و یک راس درجه $p-2$ وجود داشته آن گاه گراف، حداکثر یک راس درجه ۱ می تواند داشته باشد.
 - (۵) الگوریتم هاول - حلیمی، اگر با چهار نکته ی فوق هنوز گزینش درست مشخص نشده بود به شکل زیر عمل کنید :
- درجات را به صورت نزولی مرتب می کنیم. بزرگترین درجه را حذف کرده و به اندازه ی عدد آن، از راس های بعدی (مثلاً اگر ۵ را حذف می کنیم از ۵ راس بعدی) یک واحد کم می کنیم و درجات را در صورت نیاز، مجدداً به صورت نزولی مرتب می کنیم و این کار را ادامه می دهیم هر کجا به دنباله ای رسیدیم که شرایط گراف بودن را نداشته الگوریتم را تمام می کنیم و آن دنباله نمیتواند دنباله گراف باشد ولی اگر تا صفر شدن تمامی اعداد، الگوریتم ادامه پیدا کرد آن دنباله، گراف است.



مثال: در یک گراف ساده از مرتبه ۶، دنباله ۵ درجه ۵ راس های آن، به کدام صورت می تواند باشد؟

$$(۱) ۵ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵$$

$$(۲) ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵$$

$$(۳) ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵$$

$$(۴) ۱ و ۲ و ۳ و ۳ و ۴ و ۵$$

مثال: درجه رئوس گراف همبند G به صورت ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و b و a است. کم ترین عدد $a+b$ کدام است؟

$$(۱) ۱ \quad (۲) ۲ \quad (۳) ۳ \quad (۴) ۴$$