ماتریس

نوعی نمایش اعداد می باشد. هر ماتریس دارای تعدادی سطر و ستون می باشد.

$$B_{m\times n}=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & .. & b_{1j} & .. & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & .. & b_{2j} & .. & b_{2n} \\ : & : & & : & & : \\ b_{i1} & b_{i2} & .. & b_{ij} & .. & b_{in} \\ : & : & & : & & \\ b_{m1} & b_{m2} & .. & b_{mj} & .. & b_{mn} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{مثلا}} A_{2\times 3}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

معرفی چند ماتریس خاص

۱) اگر در ماتریس A تعداد سطر ها با تعداد ستون ها برابر و مساوی n باشد، A را یک ماتریس مربعی از مرتبه n $(n\times n)$ می نامیم . ماتریس های زیر همگی مربعی هستند:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 5 & -1 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \quad , \quad C=[5]=5$$

در ماتریس های A و B قطرهای مشخص شده را قطر اصلی این دو ماتریس می نامیم و اگر $i=j$ در این صورت درایه a_{ij} روی قطر اصلی قرار دارد.

۲) اگر در ماتریس A فقط از یک سطر تشکیل شده باشد (فقط دارای یک سطر باشد) آن را یک سطری می نامیم. ماتریس های زیر همگی ماتریس های سطری هستند:

$$A=[1 \quad 2] \quad , \quad B=[2 \quad -1 \quad 4 \quad 5] \quad , \quad C=[7]=7$$

۳) اگر ماتریس فقط دارای یک ستون باشد آن را ماتریس ستونی می نامیم.

ماتریس های زیر همگی ستونی هستند :

$$A=\begin{bmatrix}۲\\ \pi\\ -\frac{۱}{۲}\end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix}۲\\ -۱\\ ۳\\ 0\end{bmatrix} \quad , \quad C=[۱۱۴]=۱۱۴$$

۴) ماتریس قطری، ماتریس است مربعی که تمام درایه های غیرواقع بر قطر اصلی آن صفر باشند.
(درایه های واقع بر قطر میتوانند صفر باشند یا نباشند.) ماتریس های زیر همگی قطری اند:

$$A=\begin{bmatrix}۲ & ۰\\ ۰ & ۰\end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix}-۱ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۷\end{bmatrix} \quad , \quad C=\begin{bmatrix}۰ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰\end{bmatrix}$$

۵) اگر ماتریس قطری باشد و تمام درایه های روی قطر اصلی آن باهم برابر باشند آن را یک ماتریس اسکالر می نامیم. ماتریس های زیر همگی اسکالر هستند :

$$A=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix}۳ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۳ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۳\end{bmatrix} \quad , \quad C=[۲]$$

۶) ماتریس صفر، ماتریس است که همه درایه آن صفر باشند. ماتریس صفر را با نماد $\bar{0}$ نشان می دهیم.
ماتریس $\begin{bmatrix}۰ & ۰\\ ۰ & ۰\end{bmatrix}$، ماتریس صفر ۲×۲ است.

۷) ماتریس واحد (همانی ، یکه) : ماتریس $\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}$ را ماتریس واحد می نامیم و با $I_{۲\times ۲}$ نشان میدهیم.

جمع و تفریق ماتریس ها :

در صورتی می توان دو ماتریس را باهم جمع یا از هم تفریق کرد که هم مرتبه باشند. در این صورت درایه های متناظر باهم جمع یا از هم تفریق می شوند.

$$\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -5 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} +5 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} =$$

ضرب یک عدد در ماتریس:

در ضرب عدد حقیقی r در ماتریس A، عدد r در هر یک از درایه های A ضرب می شود.

$$2\begin{bmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 8 & 2 \\ 0 & 6 & 10 \end{bmatrix}$$

تساوی دو ماتریس :

دو ماتریس هم مرتبه وقتی مساویند که درایه های نظیر به نظیر آن ها مساوی باشند.

$$\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ \sqrt{9} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & \sqrt{16} \\ 6 & 6 \\ 11 & \sqrt{100} \end{bmatrix}$$

مثال: اگر دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} x-y & ۹ \\ ۲ & z-۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۳ & x+y \\ ۲ & ۵ \end{bmatrix}$ مساوی باشند $(x+y+z)$ را بیابید

مثال: اگر $\begin{bmatrix} c & -۱ \\ d & a \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۳ & b \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۱ & ۲ \\ ۱ & ۵ \end{bmatrix}$ آنگاه $(a+b+c+d)$ کدام است؟

مثال: اگر $A=\begin{bmatrix}۲ & -۱\\ ۴ & ۳\end{bmatrix}$ باشد، مقدار درایه‌ی سطر اول و ستون دوم ضرینه‌ی ماتریس $۳A$ کدام است؟

مثال: اگر $A=\begin{bmatrix}a-b & a+b\\ c-۲ & d+۱\end{bmatrix}$ ماتریس واحد باشد حاصل $(a^۲-b^۲)(c^۲-d^۲)$ کدام است؟

خواص مهم جمع ماتریس ها و ضرب عدد در ماتریس

اگر A, B و C ماتریس هایی $m \times n$ (هم مرتبه) و r و s اعدادی حقیقی باشند خواص زیر همگی به‌راحتی و با توجه به تعاریف جمع ماتریس ها ضرب عدد در ماتریس قابل اثبات اند:

$a)\ A + B = B + A$

$b)\ A + (B + C) = (B + A) + C$

$c)\ A + \bar{O} = \bar{O} + A = A$

$g)\ rA = rB\ , r \neq 0 \Rightarrow A = B$

$d) A + (-A) = (-A) + A = \bar{O}$

$e) r(A \pm B) = rA \pm rB$

$f) (r \pm s)A = rA \pm sA$

$h) A = B \Rightarrow rA = rB$

مثال: فرض کنیم $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ -۱ & ۳ & -۵ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -۲ & ۱ & ۴ \\ ۳ & ۲ & ۰ \end{bmatrix}$ در این صورت نشان می دهیم که $(-۲)(A + B) = -۲A + (-۲)B$.

ضرب دو ماتریس

ضرب دو ماتریس به صورت $A \times B$ وقتی تعریف می شود که تعداد ستون های A برابر تعداد سطرهای B باشد در غیر این صورت $A \times B$ تعریف نمی شود.

$A_{۳\times۵} \times B_{۵\times۲} = C_{۳\times۲}$

$A_{۶\times۷} \times B_{۷\times۴} = C_{۶\times۴}$

مثال: اگر $A = [-۱ \quad ۲ \quad ۰ \quad ۳ \quad -۵]$ و $B = \begin{bmatrix} -۲ \\ ۳ \\ 7 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$ در این صورت داریم:

مثال : برای هر حالت $A \times B$ و $B \times A$ را در صورت امکان محاسبه کنید.

$$a)A = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۲ & ۳ \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & -۱ \\ -۱ & ۰ & ۱ & -۲ \\ ۳ & ۱ & -۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$b)A = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۲ & ۱ \\ ۳ & -۲ \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۱ \\ ۳ & ۰ & ۵ \end{bmatrix}$$

$c)A = \begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \\ ۲ \end{bmatrix}$, $B = [۲ \quad ۳ \quad ۴]$

$d)A = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۰ \\ ۲ & -۱ & -۱ \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -۱ & ۲ & -۲ \\ -۱ & ۲ & -۲ \\ -۱ & ۲ & -۲ \end{bmatrix}$