یادآوری

در پایه‌های قبل با مفهوم احتمال و برخی تعاریف مرتبط با آن آشنا شده‌اید. در زیر خلاصه‌ای از این مطالب آورده شده است.

۱ــ **پدیده تصادفی** : پدیده یا آزمایشی است که نتیجهٔ آن را نتوان قبل از انجام، به‌طور قطعی پیش‌بینی کرد.

۲ــ **فضای نمونه** : مجموعهٔ تمام نتایج ممکنِ یک پدیدهٔ تصادفی را فضای نمونهٔ آن پدیده می‌نامیم و معمولاً آن را با S نمایش می‌دهیم.

۳ــ **پیشامد تصادفی** : هر زیر مجموعه از S را یک پیشامد تصادفی در فضای نمونه‌ای S می‌نامیم.

۴ــ **پیشامدها و اعمال روی آنها** : فرض کنیم A و B پیشامدهایی از فضای نمونه‌ای S باشند.

الف) اجتماع دو پیشامد : پیشامد $A\cup B$ وقتی رخ می‌دهد که حداقل یکی از پیشامدهای A یا B رخ دهد.

ب) اشتراک دو پیشامد : پیشامد $A\cap B$ وقتی رخ می‌دهد که هر دو پیشامد A و B رخ دهند.

پ) تفاضل دو پیشامد : پیشامد $A-B$ وقتی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ دهد، ولی پیشامد B رخ ندهد.

ت) متمم یک پیشامد : پیشامد A' (یا A^c) وقتی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ ندهد.

$$P(A')=۱-P(A)$$

۵ــ **رابطهٔ محاسبهٔ احتمال وقوع یک پیشامد** :

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\text{تعداد حالت‌های مطلوب}}{\text{تعداد همهٔ حالت‌های ممکن}}$$

۶ــ **رابطهٔ محاسبهٔ احتمال اجتماع دو پیشامد A و B** :

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

۷ــ **پیشامدهای ناسازگار** : دو پیشامد A و B را ناسازگار می‌گوییم، هرگاه A و B با هم رخ ندهند؛ به بیان دیگر $A\cap B=\varnothing$ در این صورت داریم :

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$

۸ــ **تعمیم پیشامدهای ناسازگار** : پیشامدهای $A_۱$ و $A_۲$ و $\cdots$ و A_n را دو به دو ناسازگار گوییم، هرگاه هیچ دوتایی از آنها نتوانند با هم رخ دهند. در این صورت داریم :

$$P(A_۱\cup A_۲\cup\cdots\cup A_n)=P(A_۱)+P(A_۲)+\cdots+P(A_n)$$

۹ــ **احتمال شرطی** : منظور از «احتمال A به شرط B» که آن‌را با $P(A|B)$ نمایش می‌دهیم، احتمال وقوع پیشامد A است، به شرط آنکه بدانیم پیشامد B رخ داده است و داریم :

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\qquad (P(B)\neq ۰)$$

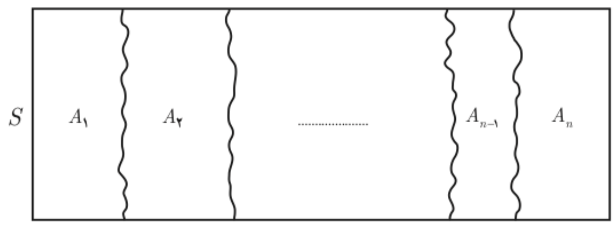
۱۰ــ **پیشامدهای مستقل** : دو پیشامد A و B از هم مستقل‌اند هرگاه وقوع هر یک بر احتمال وقوع دیگری تأثیر نداشته باشد. مستقل بودن دو پیشامد A و B معادل است با اینکه $P(A\cap B)=P(A).P(B)$.

قانون احتمال کل

ــ افراز[1] فرض کنیم A_1 و A_2 و $\cdots$ و A_n زیر مجموعه‌هایی ناتهی از مجموعهٔ S باشند، به‌گونه‌ای که اجتماع همهٔ آنها برابر S، و اشتراک هر دوتای آنها برابر $\varnothing$ باشد، در این‌صورت می‌گوییم این مجموعه‌ها یک **افراز** روی S درست کرده‌اند. به عبارتی داریم :

$$1)\ A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = S \qquad (\bigcup_{i=1}^{n} A_i = S)$$

$$2)\ A_1 \cap A_2 = \varnothing\ ,\ A_1 \cap A_3 = \varnothing\ ,\ \cdots\ ,\ A_{n-1} \cap A_n = \varnothing \qquad (A_i \cap A_j = \varnothing\ ,\ \underset{i \neq j}{1 \leq i, j \leq n})$$

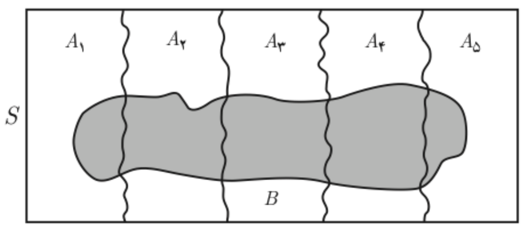


مثال : کشور ایران به ۳۱ استان افراز شده است.

مثال : اگر A مجموعهٔ اعداد طبیعی اول و B مجموعهٔ اعداد طبیعی مرکب و $C=\{1\}$ باشند، در این صورت A, B و C یک افراز روی مجموعهٔ اعداد طبیعی هستند.

مثال : مجموعهٔ اعداد گویا و مجموعهٔ اعداد اصم یک افراز روی مجموعهٔ اعداد حقیقی تشکیل می‌دهند.

سؤال : اگر S فضای نمونه‌ای یک پدیده تصادفی باشد و A_1 , A_2 , $\cdots$ و A_n مانند آنچه گفته شد یک افراز روی S درست کنند. آیا پیشامدهای A_1 , A_2 , $\cdots$ و A_n دو به دو ناسازگاراند؟ چرا؟ آیا امکان دارد هیچ‌کدام از پیشامدهای A_1 , A_2 , $\cdots$ و A_n اتفاق نیفتند؟



فرض کنید پیشامدهای A_1 , A_2 , A_3 , A_4 و A_5 مانند شکل مقابل یک افراز روی فضای نمونه‌ای S درست کرده باشند و B یک پیشامد دلخواه باشد. در این صورت داریم :

$$B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup (B \cap A_3) \cup (B \cap A_4) \cup (B \cap A_5)$$

که در آن $B \cap A_i$ و $B \cap A_j$ برای هر $i \neq j$ ناسازگاراند. چرا؟

بنابراین داریم[2] :

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + P(B \cap A_3) + P(B \cap A_4) + P(B \cap A_5) = \sum_{i=1}^{5} P(B \cap A_i)$$

اما از آنچه در احتمال شرطی مشاهده کردیم داریم :

$$P(B \mid A_i) = \frac{P(B \cap A_i)}{P(A_i)} \Rightarrow P(B \cap A_i) = P(A_i) P(B \mid A_i)$$

مثال : ۴ ظرف یکسان داریم. در اولین ظرف ۱۴ مهره قرار دارد که ۴ تای آنها قرمز است. در ظرف دوم همه مهره‌ها قرمزند. در ظرف سوم ۸ مهره قرار دارد که ۶ تای آنها قرمزند و در ظرف چهارم هیچ مهرهٔ قرمزی وجود ندارد. با چشم بسته یکی از ظرف‌ها را انتخاب کرده و از آن یک مهره بیرون می‌آوریم. احتمال اینکه مهرهٔ انتخابی قرمز باشد چقدر است؟

تمرین ها

۳ یک سکه را پرتاب می‌کنیم و اگر پشت بیاید ۳ سکهٔ دیگر را با هم پرتاب می‌کنیم. در این آزمایش احتمال اینکه دقیقاً یک سکه رو ظاهر شود چقدر است؟

۴ در یک جعبه ۵ ساعت دیواری از نوع A، ۲ تا از نوع B و ۱۵ تا از نوع C وجود دارد و احتمال اینکه عمر آنها از ۱۰ سال بیشتر باشد برای نوع A، $\frac{۴}{۵}$، برای نوع B، $\frac{۹}{۱۰}$ و برای نوع C، $\frac{۱}{۲}$ است. به تصادف یک ساعت از کارتن بیرون می‌آوریم. با چه احتمالی عمر این ساعت بیش از ۱۰ سال است؟

مثال) در یک شرکت بسته بندی کالا درصد محصولات تولیدی با سه دستگاه A,B,C به ترتیب ۳۰ و ۴۵ و ۲۵ میباشد ، می دانیم یک درصد از محصولات A دو درصد از محصولات B و چهار درصد از محصولات C معیوبند اگر یک کالا به تصادف از بین این محصولات انتخاب کنیم احتمال سالم بودن آن کدام است؟

مثال) در ۲ ظرف به ترتیب ۲۴ و ۱۸ مهره یکسان موجود است در ظرف اول ۶ مهره سفید و در ظرف دوم سه مهره سفید است از اولی ۷ مهره و دومی ۵ مهره به تصادف برداشته و در ظرف دیگر میریزیم سپس از ظرف اخر یک مهره بیرون می آوریم با کدام احتمال این مهره سفید است؟