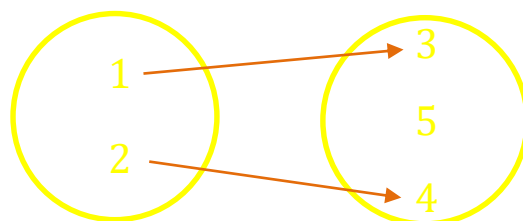
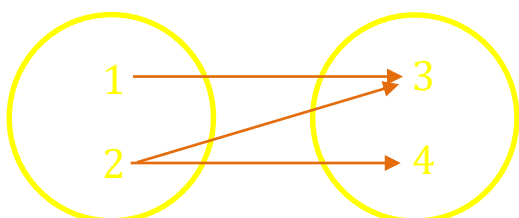


تابع و مفاهیم

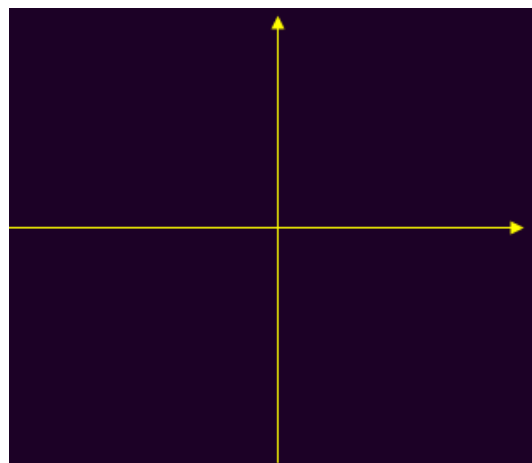
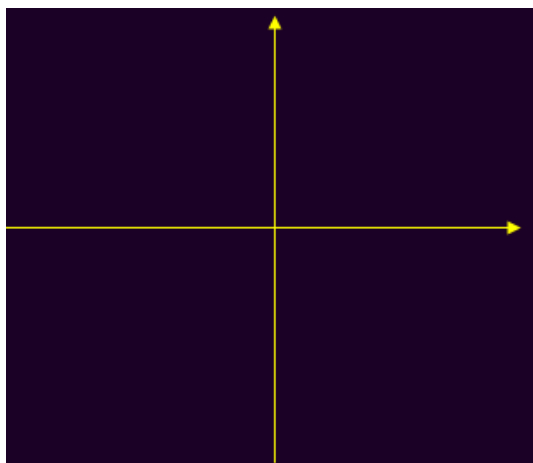
تعریف تابع:

تابع به عنوان زوج مرتب: اگر رابطه ای به صورت زوج های مرتب داده شده باشد، هنگامی این مجموعه تابع است که هیچ یک از دو زوج مرتب متمایز دارای مولفه اول یکسان نباشد.

تابع با نمودار ون: یک رابطه بین مجموعه A و B که با نمودار ون نمایش داده می شود، تنها زمانی تابع است که از هر عضو A دقیقاً یک پیکان خارج شود.



آزمون خط قائم: یک منحنی، نمایش نموداری یک تابع خواهد بود اگر هر خط موازی محور y ها نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند.



نکته: یک معادله بر حسب x و y زمانی می تواند تابع را نشان دهد که به ازای هر x مجاز فقط یک y وجود داشته باشد.

$$|y| = x$$

(مثال)

نکته: معادلات چند ضابطه ای زمانی تابع هستند که:

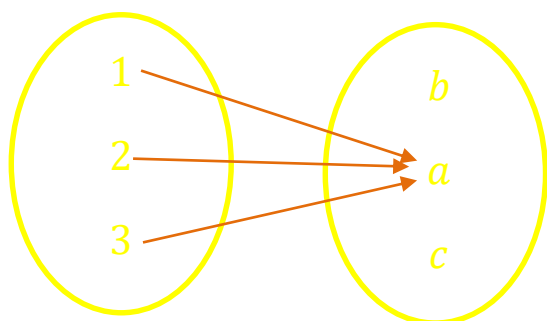
(الف) دامنه آن اشتراک نداشته باشد.

(ب) اگر دامنه مشترک دارند به ازای x دارای y یکسان باشند.

تعریف تابع ثابت و تابع همانی

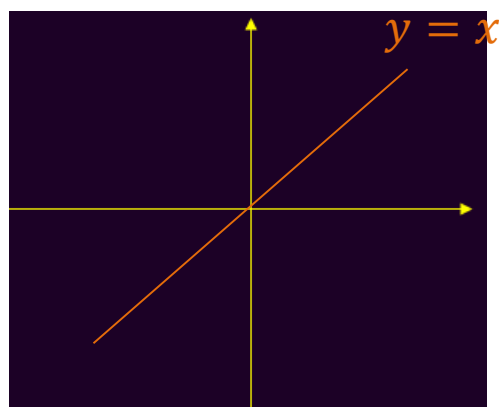
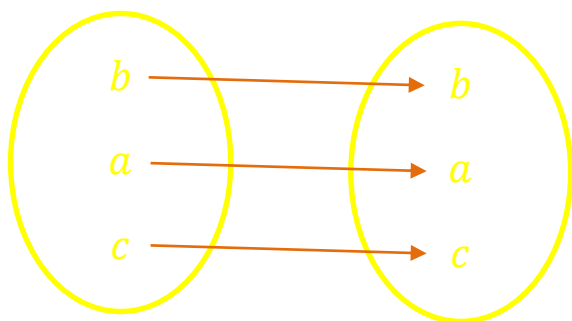
تابع $f: A \rightarrow B$ یک تابع ثابت است، اگر و تنها اگر به ازای هر $x \in A$ ، $f(x) = c$ باشد، که c عضوی ثابت از B است.

$$f = \{(1,3), (2,3), (-1,3)\}$$



تابع $f: A \rightarrow B$ یک تابع همانی است، اگر و تنها اگر به ازای هر $x \in A$ ، $f(x) = x$ باشد.

$$f = \{(2,2), (-3, -3), (\sqrt{5}, \sqrt{5})\}$$



مثال) توابع زیر توابع ثابت هستند.

$$1) f(x) = \sqrt{[x] + [-x]}$$

$$2) f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$$

مثال) توابع زیر توابع همانی هستند.

$$1) f(x) = \sqrt{9 - x^2} + \sqrt{x^2 - 9} + x$$

$$2) f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 9} + 3; x \geq 3$$

نکته: اغلب روابطی که $|y|$ و $y^{\text{زوج}}$ و $\sin y$ و $\cos y$ و $[y]$ دارند، تابع نیستند مگر در مواقع خاص.

نکته: گاهی اوقات خودمان باید با اطلاعات هندسی یا مختصاتی ضابطه تابع را مدل سازی کنیم.

مثال) نقطه $M(x, 2x - 1)$ مفروض است. ضابطه تابع فاصله M از مبدا را بیابید؟

توابع چندجمله‌ای: هر تابع به صورت $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ را یک چندجمله‌ای از درجه n می‌نامیم. دقت کنید که a_n نباید صفر شود و ضرایب a_n همگی عدد حقیقی هستند. عدد n باید صحیح و نامنفی باشد.

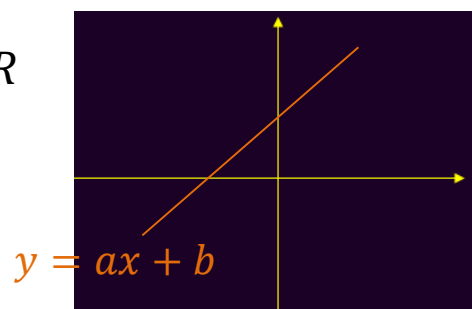
اگر $n = 0$ باشد چندجمله‌ای را ثابت یا درجه صفر می‌نامیم.

$f(x) = c$ تابع ثابت $D_f = R, R_f = \{c\}$



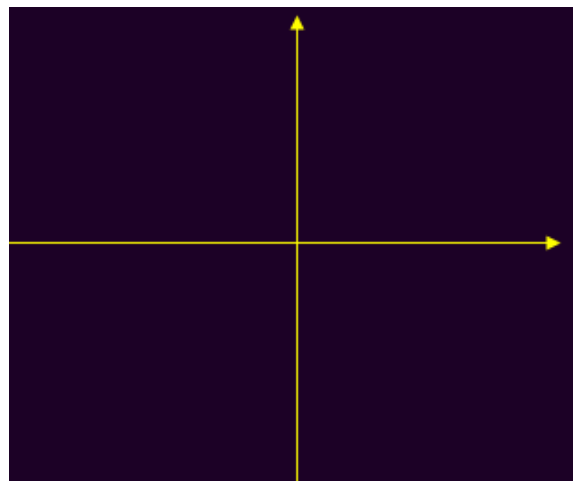
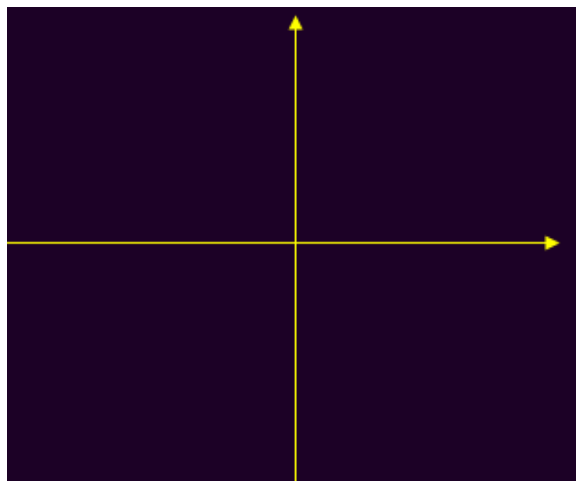
اگر $n = 1$ باشد، چندجمله‌ای را درجه اول یا خطی می‌نامیم.

$f(x) = ax + b$ تابع خطی $D_f = R, R_f = R$

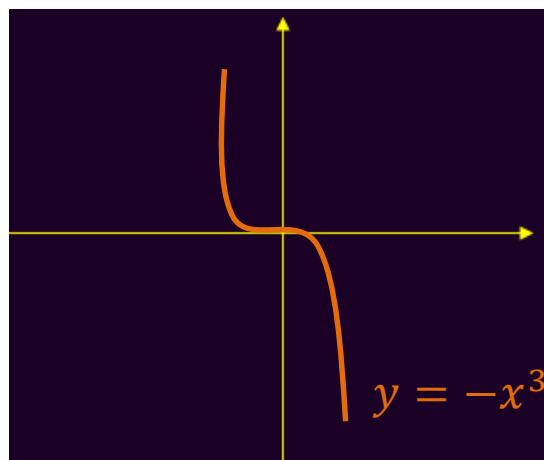
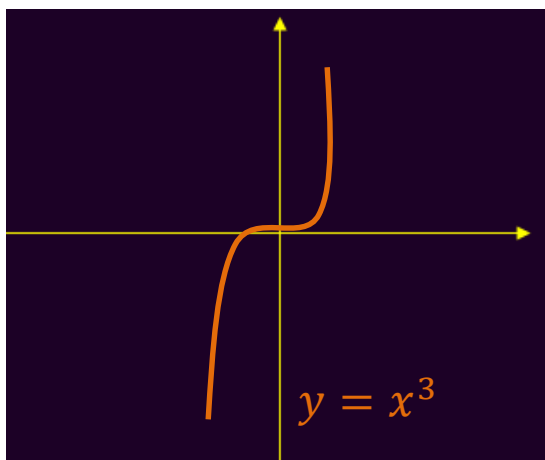


اگر $n = 2$ باشد چندجمله‌ای را درجه ۲ یا سهمی می‌نامیم.

$f(x) = ax^2 + bx + c$ تابع سهمی $D_f = R$

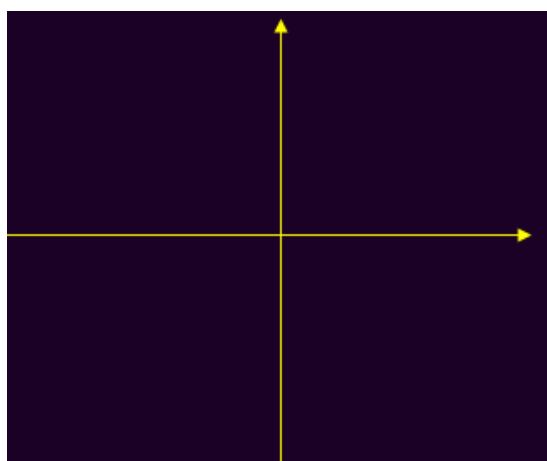


اگر $n = 3$ باشد، تابع چند جمله ای را درجه ۳ می نامیم. کتاب درسی به صورت خاص به بررسی تابع $f(x) = x^3$ پرداخته است.

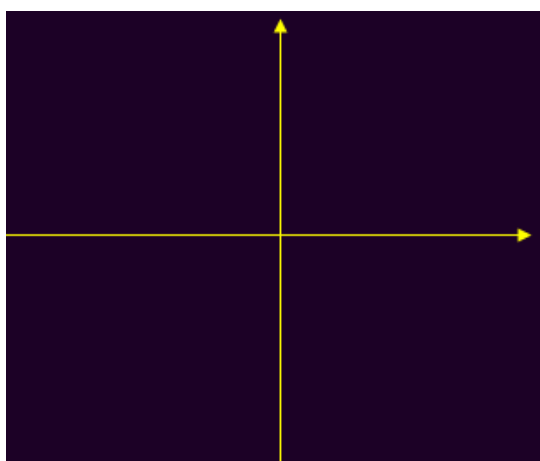


مثال) به کمک $f(x) = x^3$ نمودارهای زیر را رسم کنید.

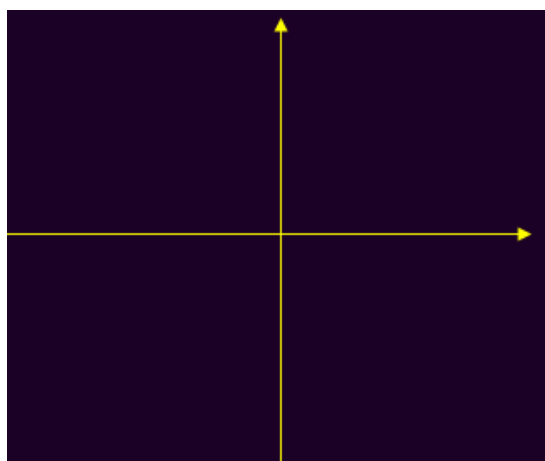
$$f(x) = x^3 + 1$$



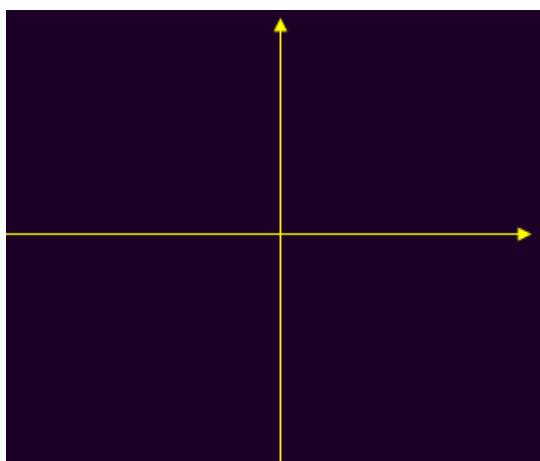
$$f(x) = x^3 - 2$$



$$f(x) = (x - 2)^3$$

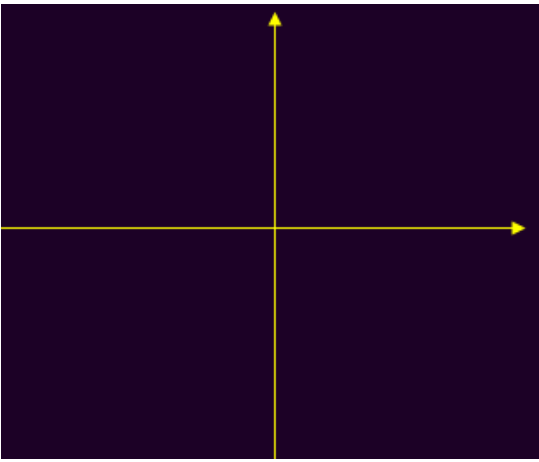


$$f(x) = -(x - 1)^3 + 2$$

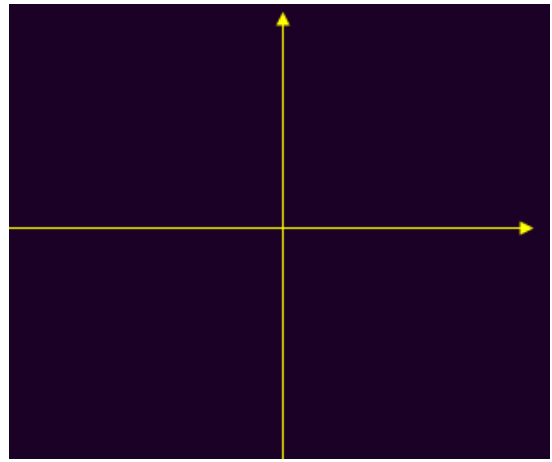


مثال) توابع زیر را رسم کنید؟

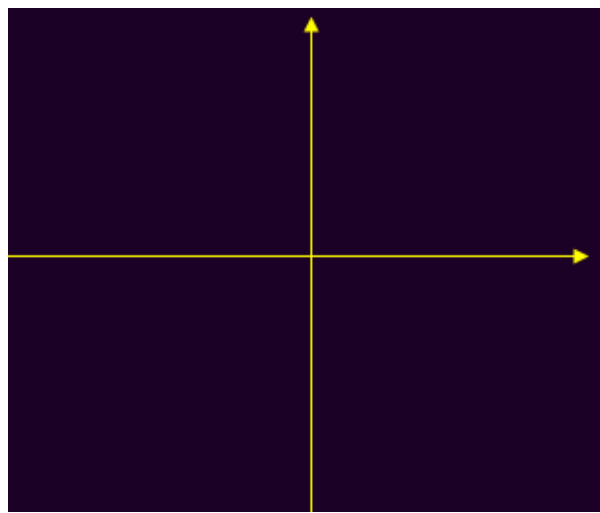
$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$$



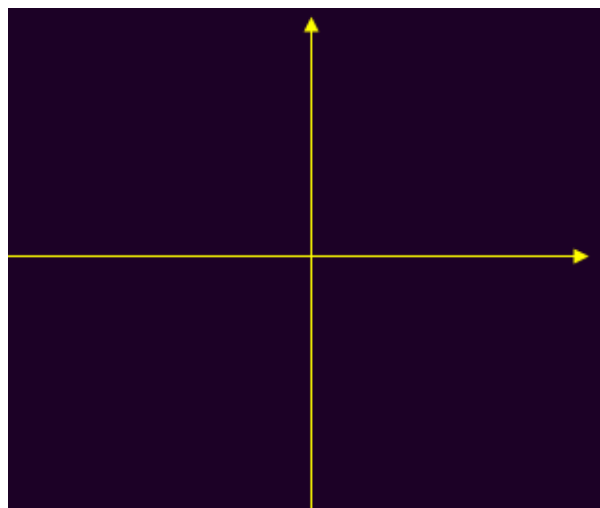
$$f(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 10$$



مقایسه $y = x^2$ و $y = x^3$ در $x > 0$



مثال) نمودار توابع $y_1 = x^3$ و $y_2 = x|x|$ را با هم مقایسه کنید؟



تست

۱- رابطه $A = \{(3, m^2), (2, 1), (-3, m), (-2, m), (3, m + 2), (m, 4)\}$ به ازای

کدام مقدار m تابع است؟ (تجربی خارج ۸۸)

(۱) -2

(۲) -1

(۳) 2

(۴) هیچ مقداری

۲- $f(x) = \frac{x^3 + ax^2 + bx + c}{x^2 - x + 1}$ یک تابع همانی است. حاصل $a + b + c$ کدام است؟

(۱) 1

(۲) -1

(۳) 0

(۴) -2

۳- اگر $f = \{(1, a + b + 1), (2a, 2a - 1), (2, a^2)\}$ یک تابع ثابت باشد، ab کدام

است؟

(۱) 3

(۲) -2

(۳) 1

(۴) -1

۴- اگر $f = \{(4a + b, 4a^2 + b + 1), (4a + b^2, 2b + 1), (b^2, 1)\}$ همانی باشد،

آنگاه $a - b$ کدام است؟

(۱) $\frac{3}{2}$

(۲) $\frac{1}{2}$

(۳) $-\frac{3}{2}$

(۴) $-\frac{1}{2}$

۵- اگر نمودارهای توابع $y = 2x + b$ و $y = 2x^2 + ax + b$ در نقطه ای به طول ۲ بر روی

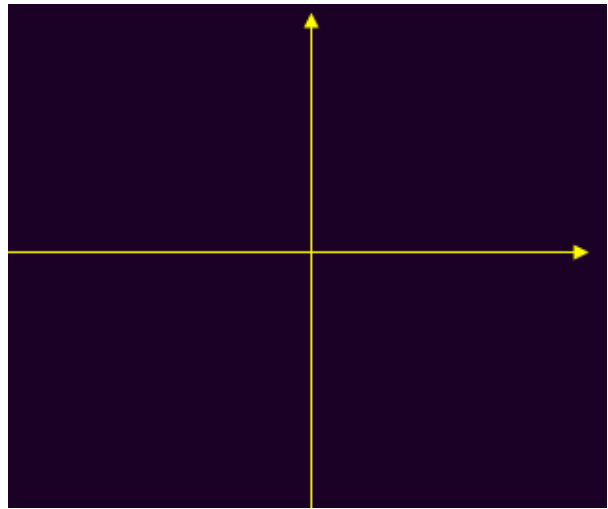
محور x ها متقاطع باشد، a کدام است؟ (تجربی (۱) (۱) -۱ (۲) -۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۶- اگر تابع f همانی و تابع g ثابت باشند $5f(1)g(1) + f(2)g(2) = 3 + f(3)g(3)$ ، آنگاه

(۱) $\frac{21}{4}$ (۲) $\frac{4}{21}$ (۳) $\frac{17}{4}$ (۴) $\frac{4}{17}$

دامنه توابع

دامنه: ورودی های مجاز یک تابع (مولفه اول)



$$f(x) = x^3 - 2x + 5$$

دامنه توابع چند جمله ای: $D_f = R$

دامنه توابع کسری: $D_f = R - \{\text{ریشه های مخرج}\}$

مثال) دامنه توابع زیر را بیابید؟

$$1) y = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 9}$$

$$2) y = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$



$$3) y = \frac{x-1}{x^2+4}$$



$$4) y = \frac{1-x}{x^5-13x^3+36x}$$



$$5) y = \frac{x^2+5}{[x]-3}$$



$$6) y = \frac{2x-1}{2x-|x-1|}$$



$$7) y = \frac{1-x}{2^{2x-1}-4^{3x-2}}$$



$$8) y = \frac{4+\cos x}{\sin x-1}$$



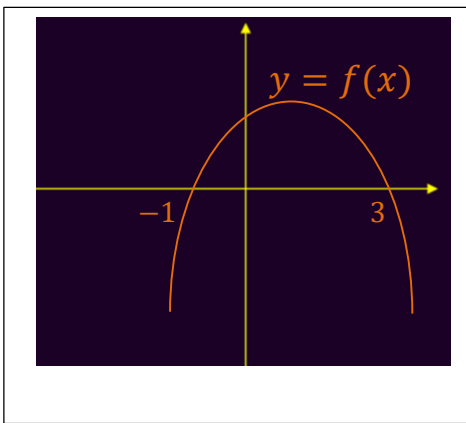
مثال) اگر دامنه تابع $y = \frac{1-x}{x^2+3ax+b}$ به صورت $R - \{1, -2\}$ باشد، $a + b$ کدام است؟

مثال) اگر دامنه $y = \frac{x^2-3x}{2x^2-2bx+3a}$ به صورت $R - \{3\}$ باشد a و b را بیابید؟

مثال) اگر دامنه تابع $y = \frac{1}{2x^3-bx^2+3ax+c}$ به صورت $R - \{0, -1, 2\}$ باشد، a و b و c را بیابید؟

مثال) اگر دامنه تابع $y = \frac{x-1}{(m-1)x^2+6x+2m+1}$ ، R باشد حدود m را بیابید؟

مثال) اگر نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت زیر باشد دامنه تابع $g(x) = \frac{x^2-x}{(x^2-9)f(x+2)}$ را بیابید؟



دامنه توابع رادیکالی

$$y = \sqrt[n]{f(x)}$$

$$y = \frac{1}{\sqrt[n]{f(x)}}$$

مثال) دامنه توابع زیر را بیابید؟

$$y = \sqrt{3-x}$$

$$y = \frac{x-3}{\sqrt{4-x}} + \sqrt{x-1}$$

$$y = \sqrt{x^2 + x - 12}$$

$$y = \sqrt{\frac{3-x}{x^2-4}}$$

نکات:

$$y = \sqrt{ax + b}$$

$$y = \sqrt{3x - 1}$$

$$y = \sqrt{4 - 2x}$$

$$y = \frac{1-x}{\sqrt{3-x}}$$

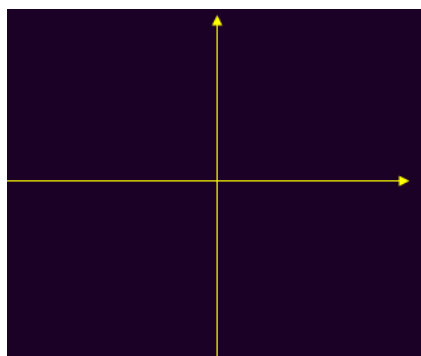
$$y = \sqrt{x - 1} + \frac{x-2}{\sqrt{4-x}}$$

$$y = \sqrt{\sqrt{x + 5} - \sqrt{x + 2}}$$

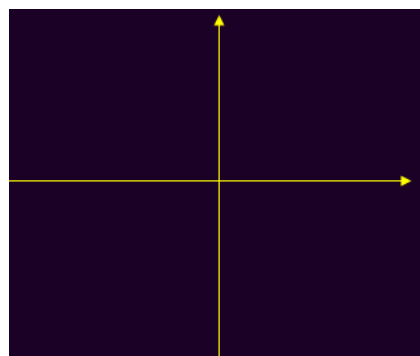
$$y = \sqrt{\sqrt{x + 2} - \sqrt{x + 3}}$$



$$y = \sqrt{a^2 - x^2}$$



$$y = \sqrt{x^2 - a^2}$$



$$y = \sqrt{4 - x^2}$$



$$y = \frac{x-1}{\sqrt{9-x^2}}$$



$$y = \sqrt{x^2 - 4}$$



$$y = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2+3x-10}$$



$$y = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^2-5}}$$



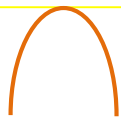
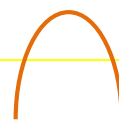
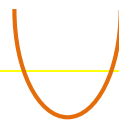
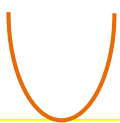
$$y = \frac{\sqrt{x^2-16}}{\sqrt{25-x^2}}$$





$$y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$$



$y = \sqrt{\text{سه می}}$ → دقت به ریشه ها و دهانه

$$y = \sqrt{x^2 - 4}$$

$$y = \sqrt{2x - x^2}$$

$$y = \frac{x-1}{\sqrt{x^2+3x}}$$



مثال دامنه تابع $y = \sqrt{-3x^2 + 2bx + a}$ به صورت $\{2\}$ است. a و b را بیابید؟



مثال دامنه تابع $y = \sqrt{x^2 - mx + 4}$ ، R است. حدود m را بیابید؟



مثال دامنه تابع $f(x) = \sqrt{(a^2 - 4)x^2 + ax + 6}$ به صورت $(-\infty, b]$ است. $a + b$

را بیابید؟





$$y = \sqrt{\text{عبارت مثبت}} \text{ یا } y = \sqrt{\text{عبارت نامنفی}} \rightarrow D = R$$

$$y = \sqrt{x^2 + 4}$$

$$y = \sqrt{|x - 3|}$$

$$y = \sqrt{\sin x + 3}$$

$$y = \sqrt{x^2 + 3x + 7}$$

$$y = \sqrt{\text{عبارت نامنفی}} \xrightarrow{\text{برای محاسبه دامنه}} \text{عبارت نامنفی} = 0$$

$$y = \sqrt{-|x - 3|}$$

$$y = \sqrt{-|x - 1|(x^2 - 4)^2}$$

$$y = \sqrt{*} \pm \sqrt{-*} \xrightarrow{\text{برای محاسبه دامنه}} *= 0$$

$$y = \sqrt{x^2 - 3x} + \sqrt{3x - x^2}$$

$$y = \frac{\sqrt{*}}{\sqrt{-*}} \rightarrow D = \emptyset$$

$$y = \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{\sqrt{9 - x^2}}$$

$$y = \sqrt{x^2 - 3x} + \sqrt{\frac{-1}{x^2 - 3x}}$$





$$y = \sqrt{3 - [x]}$$



$$y = \frac{x^2 - 4x}{\sqrt{[x] - 2}}$$



$$y = \sqrt{3 - |x - 1|}$$



$$y = \sqrt{2^{4x - x^2} - 8}$$



$$y = \sqrt{3 - \sqrt{x^2 - 16}}$$



$$y = \log_a f(x) \rightarrow f(x) > 0$$

$$y = \log_{g(x)} f(x) \rightarrow \begin{matrix} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ g(x) \neq 1 \end{matrix} \rightarrow \text{اشتراک}$$

$$y = \log(3x - x^2)$$

$$y = \log_{x-1} 9 - x^2$$

$$y = \log(x^2 - 6x + 9)$$

$$y = \frac{1}{\log x}$$

$$y = \sqrt{\log_3 x}$$

$$y = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}} x}$$

$$y = \frac{1}{\log_2 x - 3}$$

$$y = \frac{1}{\log_2 x - \log_4 (x-1)}$$

$$y = \sqrt{1 - \log(x - 1)}$$

نکته: دامنه توابع به صورت $y = \sin(f(x))$ ، $y = [f(x)]$ ، $y = |f(x)|$ ، $y = a^{f(x)}$ ، $\cos(f(x))$ و $y = \sqrt[f]{f(x)}$ با دامنه $f(x)$ برابر است.

$$y = [\cos \sqrt[3]{x^2 - x}]$$

$$y = \sqrt[7]{\left[\sin \frac{x-1}{x^2-4}\right]}$$

دامنه $y = \tan(f(x))$ و $y = \cot(f(x))$

$$\tan \Delta \rightsquigarrow$$

$$\cot \Delta \rightsquigarrow$$

$$y = \sqrt[3]{\cot\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)}$$

$$y = x[\tan(3x)] + x^2$$

دامنه توابع چند ضابطه ای

$$y = \begin{cases} f_1 & x \in D_{f_1} \\ f_2 & x \in D_{f_2} \\ f_3 & x \in D_{f_3} \end{cases} \rightarrow \text{اجتماع دامنه ها}$$

$$y = \begin{cases} f_1 & x \geq a \\ f_2 & x < a \end{cases}$$