مهندس

حسن پور

توان های گویا (ریشه و توان)

ریشه n ام اعداد: اگر $b^n = a$ باشد، آنوقت b یک ریشه n ام عدد a است. $(n \in N\,, n \geq 2)$

مثال) $2^6 = 64$ ، پس یک ریشه ششم عدد ۶۴ برابر ۲ است. همچنین $(-2)^6 = 64$ ، پس یک ریشه ششم ۶۴ برابر ۲- است. درنتیجه ۲ و ۲- ریشه های ششم عدد ۶۴ هستند، چون $(\pm 2)^6 = 64$.

مثال) $(-2)^5 = -32$ پس ریشه پنجم عدد ۳۲- برابر ۲- است.

نکات:

ریشه n ام a (n زوج)	ریشه n ام a (n فرد)	علامت a
$\sqrt[n]{a}$ و $-\sqrt[n]{a}$	$\sqrt[n]{a}$	$a > 0$
ندارد	$\sqrt[n]{a}$	$a < 0$

مقایسه $\sqrt[n]{a^n}$ و $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n$:

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} |a| & n \text{ زوج} \\ a & n \text{ فرد} \end{cases}$$

دقت شود در حالت $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n$ اگر n زوج و $a < 0$ باشد $\sqrt[n]{a}$ و $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n$ تعریف نمی شوند.

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^{\mathrm{n}} = \begin{cases} a & n \text{ زوج}\,,\ a \geq 0 \\ a & n \text{ فرد} \end{cases}$$

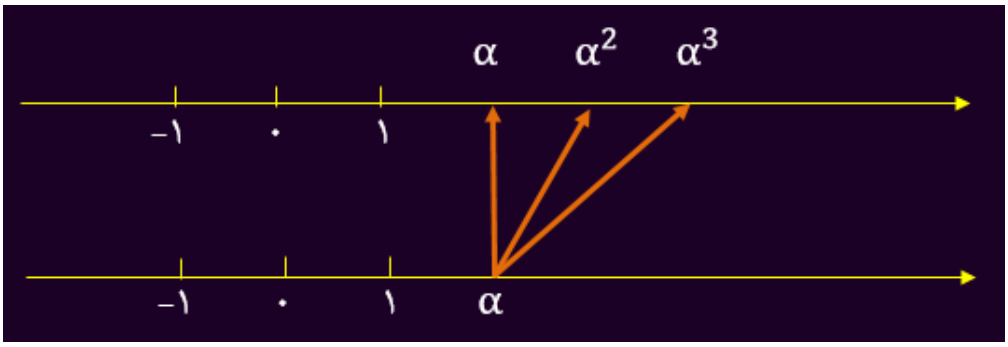
مثال) حاصل $B = \sqrt[6]{(2-\sqrt{5})^6} - \sqrt[5]{(\sqrt{5}-3)^5}$ را بیابید؟

مقایسه توان ها و ریشه ها مثبت اعداد:

برای مقایسه توان های عدد a و ریشه های مثبت عدد a، کل اعداد حقیقی را به ۵ دسته تقسیم می کنیم:

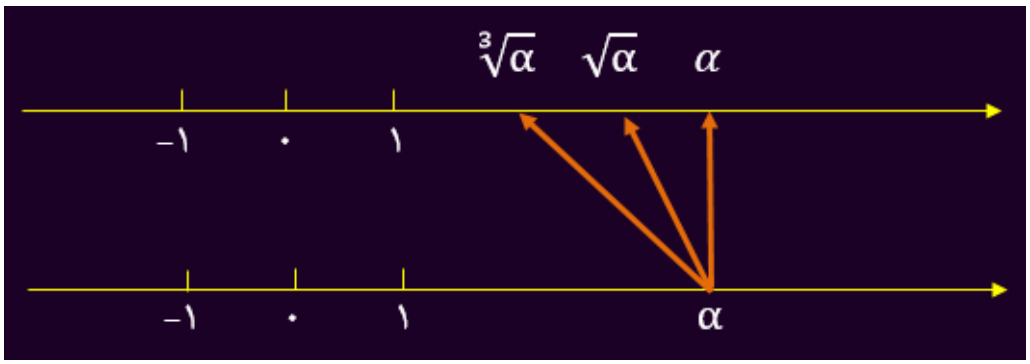
۱- $a > 1$:

- هرچه توان بزرگتر شود عدد نیز بزرگتر می شود: $1 < a < a^2 < a^3 < \dots$



- هرچه مرتبه ریشه بزرگتر شود ریشه های مثبت کوچکتر می شود:

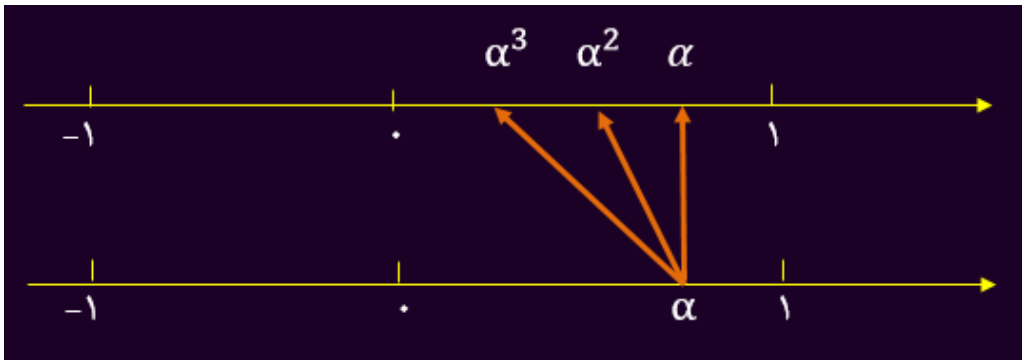
$$1 < \dots < \sqrt[4]{a} < \sqrt[3]{a} < \sqrt{a} < a$$



۲- $0 < a < 1$:

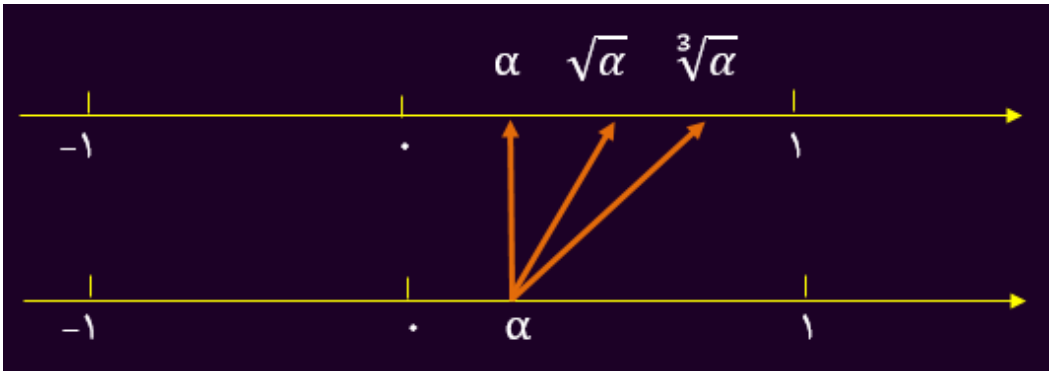
اعداد بین صفر و یک دقیقا عکس اعداد بزرگتر از یک هستند.

- هرچه توان بزرگتر شود، کوچکتر می شوند. $1 > a > a^2 > a^3 > \cdots > 0$



- هرچه مرتبه ریشه بزرگتر شود، مقدار ریشه مثبت هم بزرگتر می شود.

$1 > \cdots > \sqrt[3]{a} > \sqrt{a} > a > 0$

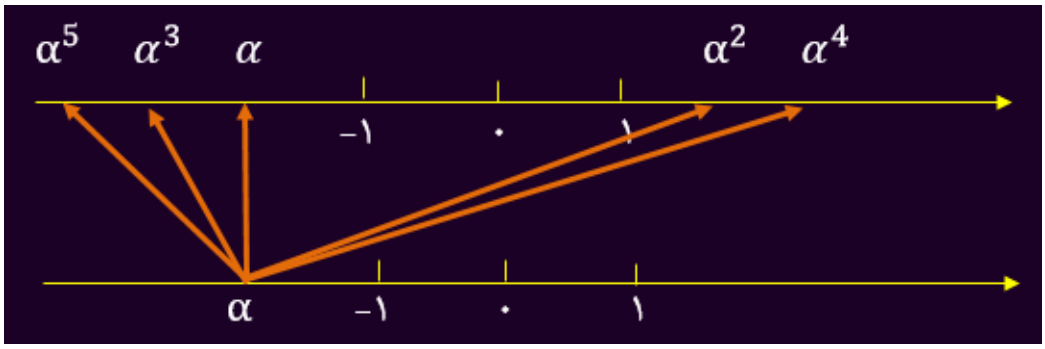


۳- $a < -1$:

زمانی که اعداد منفی وسط کار می آیند، باید توان فرد و زوج را از هم جدا کنیم. همچنین ریشه های مرتبه زوج را حذف کنیم.

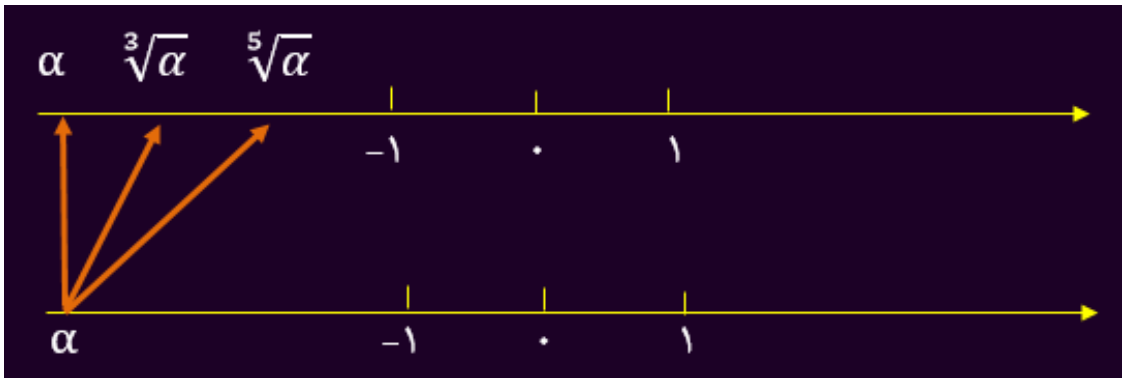
- از آنجائیکه توان های زوج اعداد منفی، مثبت اند، پس توان زوج از توان های فرد بزرگترند.

$$\ldots > a^4 > a^2 > 0 > a > a^3 > a^5 > \cdots$$



- در ریشه های مرتبه فرد هرچه مرتبه ریشه بزرگتر باشد، مقدار ریشه هم بزرگتر می شود.

$$-1 > \cdots > \sqrt[5]{a} > \sqrt[3]{a} > a$$

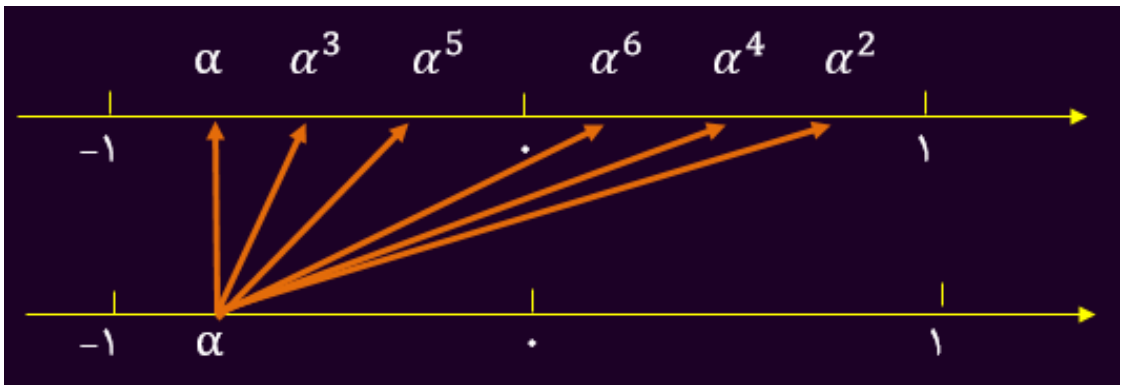


۴- $-1 < a < 0$:

این اعداد نیز منفی اند پس توان های زوج از توان های فرد بزرگتر است و ریشه مرتبه زوج ندارد.

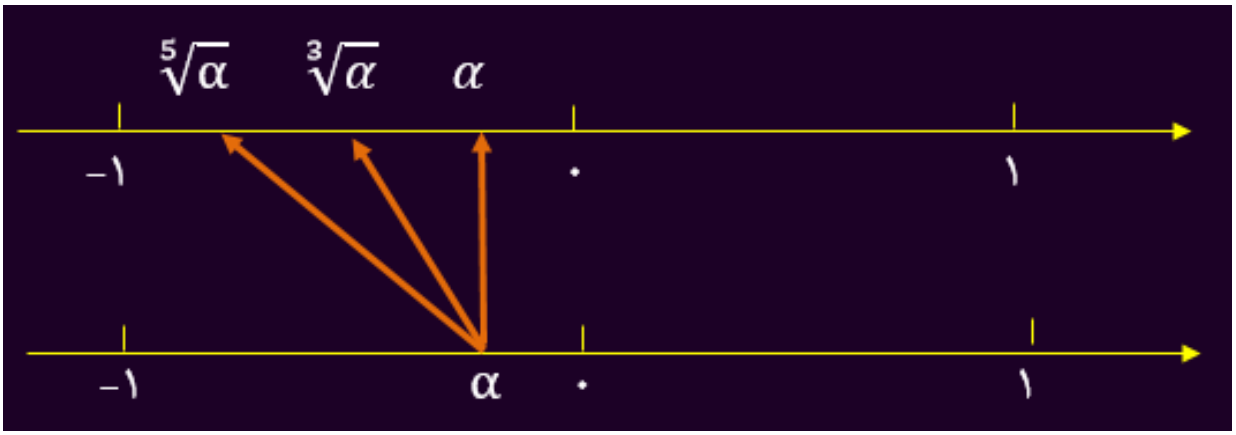
- در قسمت توان های زوج و فرد به صورت جداگانه، جای توان ها نسبت به حالت $a < -1$ عوض می شود.

$$a^2 > a^4 > a^6 > \cdots > 0 > \cdots > a^5 > a^3 > a$$



- در ریشه های مرتبه فرد هم ترتیب قرار گرفتن، عکس حالت $a < -1$ است.

$$0 > a > \sqrt[3]{a} > \sqrt[5]{a} > \cdots > -1$$



۵-اعداد ۰ و ۱ و ۱-:

- عدد صفر: تمام توان های طبیعی و تمام ریشه های آن برابر با صفر است.
- عدد ۱: تمام توان های طبیعی ریشه های مرتبه فردش، برابر با خود ۱ است ولی ریشه های زوجش برابر ± 1 می شود.
- عدد ۱-: توان فرد و ریشه های مرتبه فرد آن برابر با خود ۱- است ولی توان های زوجش برابر با ۱ است و مرتبه ریشه زوج هم ندارد.

توان های گویا: توان $\frac{1}{n}$ را فقط برای اعداد مثبت تعریف می کنیم. توان $\frac{1}{n}$ عدد مثبت a همان ریشه n ام مثبت a است.

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \qquad (n \geq 2\,, a > 0)$$

حق نداریم $\sqrt[n]{a}$ را به صورت $a^{\frac{1}{n}}$ بنویسیم.

حال اگر m و n دو عدد طبیعی باشند، تعریف می کنیم $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$، پس توان کسری یک عدد مثبت به ریشه n ام توانی از آن برمی گردد.

مثال) خلاصه شده عبارت $A = \frac{\sqrt[4]{\frac{1}{4}\times\sqrt[3]{2}}}{\sqrt[6]{8}+\sqrt{2}}$ را بیابید؟