**آنالیز ریاضی (ترکیبیات):**

**تعریف: شمارش، بدون شمردن (اصل ضرب، اصل جمع، فاکتوریل، جایگشت، ترتیب، ترکیب).**

**اصل ضرب: فرض کنید عملی را به $n_1$ طریق و عمل دیگری را به $n_2$ طریق می توان انجام داد، تعداد کل حالات ممکن برابر است با $n_1 \times n_2$ طریق و این اصل قابل تعمیم است.**

$n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_k$

**مثال) به چند طریق می توان با ۴ پیراهن متمایز، ۳ کفش متمایز و ۵ شلوار متمایز تیپ های مختلف زد؟**

**مثال) با ارقام ۶، ۵، ۴، ۳، ۲ چند عدد سه رقمی می توان ساخت؟**

**مثال: با ارقام ۴، ۳، ۲، ۱، ۰ چند عدد سه رقمی می توان ساخت؟**

**چند نکته در باب اصل ضرب:**

**۱) در نوشتن اعداد $n$ رقمی یا کلماتی که $n$ حرفی اند، به تعداد خانه هایی که پر می کنیم از اعداد اصلی کم می کنیم.**

**۲) عدد (فرد/ زوج) عددی است که یکانش (فرد/ زوج) باشد**

**۳) تقسیم کردن (پخش کردن) n تا .... بین k تا ....**

**الف– کل حالات: برد به توان دامنه**

**ب– به هر نفر حداکثر یکی برسد... $k(k-1)(k-2)$**

**مثال) به چند طریق ۴ جایزه را بین ۶ نفر تقسیم کنیم؟**

**مثال) به چند طریق ۴ نفر درون آسانسور در ۶ طبقه پیاده می شوند؟**

**مثال) به چند طریق می توان ۴ جایزه را بین ۶ نفر تقسیم کرد طوری که به هرنفر حداکثر ۱ جایزه برسد؟**

**۴) در اصل ضرب در ۲ مورد سؤال را دو حالتی حل کن:**

**الف) رقم ۰ (صفر) داشتیم و عدد زوج یا مضرب ۵ بدون تکرار خواسته شد**

**ب) رقمی وجود داشت که می توانست دردو خانه قرار گیرد**

**مثال) با ارقام ۶، ۲، ۱، ۰ چند عدد ۴ رقمی بدون تکرار زوج می توان نوشت؟**

**نکته: حرف (ی) خانه آخر بی نقطه می آید.**

**اصل جمع: اگر یک عمل به $n_1$ و عمل دیگر به $n_2$ طریق قابل انجام باشد ولی انجام هم زمان دو عمل امکان پذیر نباشد، آن گاه عمل اول یا دوم (هر دو با هم نه!) را به $n_1 + n_2$ طریق می توان انجام داد.**

**مثال) شخصی ۴ مداد رنگی متمایز و ۳ خودکار رنگی متمایز دارد. او به چند طریق می تواند با خودکار یا مداد بنویسد؟**

**مثال) از میان ۷ ایرانی، ۳ آلمانی، ۴ فرانسوی به چند طریق می توان دو نماینده انتخاب کرد به طوری که نماینده ها از ملیت های مختلف باشند؟**

**فاکتوریل: حاصل ضرب اعداد از ۱ تا $n$ را $n$ فاکتوریل ($n!$) می نامیم.**

$$۱ \times ۲ \times ۳ \times ... \times (n-۱) \times n = n!$$

**انواع سؤالات فاکتوریل:**

**۱) ساده کردن: الف- فاکتورگیری ب- صورت و مخرج**

$$۱۹(۱۹! + ۱۸!) =$$

$$\frac{۱۰!}{۳! \times ۸!} =$$

**۲) حل معادله:**

$n! = ۶ \rightarrow$

$(n-۲)! = ۱۲۰ \rightarrow$

$(n+۲)! = ۵۶ \times n! \rightarrow$

**جایگشت: تعداد قرار گرفتن $n$ شی متمایز کنار هم را با $n!$ نمایش می دهیم و هر یک از حالات ممکن را یک جایگشت می نامیم.**

**انواع مسائل جایگشت: الف– بدون تکرار ب– با تکرار**

**الف– جایگشت بدون تکرار:**

**A) در حالت عادی**

**B) چند نفر کنار هم**

**C) یکی در میان**

**D) دور میز گرد**

**F) چند نفر کنار هم نباشند**

$A)$ **جایگشت در حالت عادی : جایگشت $n$ شی متمایز کنار هم برابر $n!$ است.**

**مثال) ۷ نفر به چند طریق می توانند کنار هم قرار گیرند؟**

**$B)$ جایگشت چند نفر (شیء) کنار هم : ((روش بسته بندی)): اگر در محاسبه تعداد جایگشت های $n$ شیء متمایز قرار باشد چند شیء (نفر) مشخص هموار کنار هم باشند، کافیست آن ها را یک شیء فرض کنیم (به هم بچسبانیم) و تعداد جایگشت آن ها را با بقیه اشیاء (افراد) حساب و در آخر تعداد جایگشت های خود این اشیاء (افراد) را نیز حساب کرده در جواب قبلی ضرب می کنیم.**

**مثال) تعداد جایگشت های حروف کلمه پژوهش به شرطی که دو حرف (و) و (ه) کنار هم باشند را بدست آورید.**

**مثال) تعداد جایگشت های حروف کلمه logarithm به شرطی که بخش log در آن دیده شود چگونه است؟**

**$C)$ جایگشت یک در میان:**

**الف) تعداد برابر،**

**ب) تعداد نابرابر،**

**مثال) به چند طریق می توان ۴ مرد و ۴ زن را یک در میان قرار داد؟**

**مثال) به چند طریق می توان ۴ زن و ۳ مرد را یک در میان قرار داد؟**

$D)$ **جایگشت دور میزگرد: $n$ نفر برابر $(n-۱)!$ است .**

**مثال) ۶ نفر به چند طریق می توانند دور یک میز گرد قرار گیرند؟**

**مثال) به چند طریق می توان ۷ درخت بلوط متمایز و ۳ درخت گلابی متمایز را دور یک محیط دایره ای شکل کاشت؟**

**مثال) به چند طریق می توان ۷ درخت بلوط متمایز و ۳ درخت گلابی متمایز را دور یک محیط دایره ای شکل کاشت به طوری که درخت های هم نوع کنار هم باشند؟**

$F)$ **جایگشت چند نفر که کنار هم نباشند ((روش حفره)):**

**مثال) حروف کلمه logarithm به چند طریق جا به جا شوند تا حروف $a,r,t$ کنار هم نباشند؟**

**ب– جایگشت با تکرار:** $n$ **شیء یکسان** $(A')$

$n$ **شیء که** $k$ **تای آن ها مثل هم باشد** $(B')$

$n$ **شیء که** $k$ **تای آن ها تکراری باشد و انتخابی نیز باشد** $(C')$

$(A')$ **: جایگشت** $n$ **شیء یکسان برابر یک است چون جا به جایی اشیاء حالت جدید ایجاد نمی کند.**

**مثال) با عدد ۵و ۵ و ۵ چند عدد سه رقمی می توان نوشت؟**

**$(B')$: اگر $n$ شیء داشته باشیم که $n_1$ تای آن از نوع اول، $n_2$ تای آن از نوع دوم و... تعداد حالات ممکن برابر است با:**

**مثال) با حروف کلمه بامداد چند کلمه ۶ حرفی می توان نوشت؟**

**مثال) با ارقام ۱، ۱، ۵، ۳، ۳، ۴، ۴، ۴ چند عدد ۸ رقمی می توان ساخت؟**

**مثال) به چند طریق می توان حروف کلمه** Mississippi **را کنار هم قرار داد به طوری که:**

**الف– بدون محدودیت:**

**ب– حروف یکسان کنار هم باشند:** !

**ج– هیچ دو حرف** p **کنار هم نباشند:**

**مثال) با حروف کلمه بامداد چند کلمه ۶ حرفی می توان ساخت به طوری که:**

**الف– دو حرف الف کنار هم باشند:**

**ب– با حرف (د) شروع شود:**

**ج– به حرف (م) ختم شود:**

**د– با حرف (د) شروع و به (م) ختم شود:**

**مثال) جایگشت حروف DAMDARAN به شرطی که:**

**الف– بدون محدودیت:**

**ب– حروف یکسان کنار هم باشند:**

**مثال) جایگشت حروف ASSIST به شرطی که:**

**الف– بدون محدودیت**

**ب– S ها کنار هم باشند:**

**ج– S ها یک در میان باشند:**

**مثال) چند عدد سه رقمی داریم که:**

**الف) متقارن باشد**

**ب) متقارن زوج باشد**

**ج) متقارن فرد باشد**

**د) متقارن فرد بین ۳۰۰ تا ۷۰۰ باشد**

**مثال) ۲ سرباز و ۴ افسر در چند حالت می توانند کنار هم قرار بگیرند به طوری که:**

**الف– بدون محدودیت:**

**ب– افسرها کنار هم و سربازها کنار هم باشند:**

**ج– سربازها در ابتدا و انتها قرار گیرند:**

**د– فقط سربازها کنار هم باشند:**

# ترتیب:

**هرگاه بخواهیم از بین n نفر متمایز r شی را انتخاب کنیم، به شرطی ک ترتیب اهمیت داشته باشد.**

$$P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}$$

**مثال)به چند طریق میتوان از بین ۵ نفر، ۲ نفر را به عنوان رئیس و معاون انتخاب کرد:**

# ترکیب:

**هرگاه بخواهیم از بین $n$ شیء متمایز، $r$ شیء را انتخاب کنیم، به شرطی که ترتیب اهمیت نداشته باشد:**

$$c(n,r)=\binom{n}{r}=\frac{n!}{(n-r)!r!}$$

**همواره** $p(n,r)\geq c(n,r)$