درس اول: فضای نمونه وپیشامد در پدیده های تصادفی

پله ی اول انواع پدیده ها(آزمایش ها) و آشنایی اولیه با مفهوم احتمال

پدیده یا آزمایش های مختلفی در دنیا در حال وقوع است که میتوان آنها را به صورت زیر دسته بندی کرد.

دسته اول) پدیده ها (آزمایش ها) قطعی :

پدیده یا آزمایش هایی هستند که با فرض یکسان بودن شرایط ، نتیجه آزمایش و یا مشاهده ، قبل از وقوع به طور قطع قابل تشخیص است. مثل افتادن سیب از درخت

دسته دوم)پدیده ها(آزمایش ها) تصادفی :

پدیده یا آزمایش هایی هستند که با فرض یکسان بودن شرایط نتیجه آزمایش و یا مشاهده قبل از وقوع قابل تشخیص نمی باشد .به عبارت بهتر فقط میتوانیم همه ی حالت های ممکن در رخداد آن را مشخص کنیم اما از اینکه کدام حالت قطعا رخ خواهد داد اطمینان نداریم.

مثلا نتیجه یک بازی فوتبال از قبل قابل پیش بینی نیست اما سه حالت پیروزی، تساوی و باخت برای هریک از تیم ها وجود دارد که ممکن است اتفاق بیافتد.

آشنایی اولیه با مفهوم احتمال : به میزان شانس رخ دادن یک حالت در انجام یک پدیده یا ازمایش تصادفی احتمال رخ دادن آن حالت گویند.

نتیجه گیری : در بحث احتمال فقط با پدیده های تصادفی سروکار داریم. چند پدیده تصادفی که در این فصل با آن ها درگیر هستیم عبارتند از پرتاب تاس ، پرتاب سکه و فرزند و ....

پله ی دوم تعریف فضای نمونه و نحوه ی به دست آمدن آن

به مجموعه ی همه ی حالت های ممکن در یک آزمایش تصادفی را فضای نمونه گویند.

این مجموعه را با S و تعداد اعضای آن را با $n(S)$ نمایش می دهیم .

برای مثال در پرتاب یک $S=\{1,2,3,4,5,6\}$ و $n(S)=6$ است. مهم ترین موضوع در بحث فضای نمونه ، بدست آوردن فضای نمونه (S) و تعداد اعضا فضا نمونه $(n(S))$ می باشد.

فضای نمونه(S) : برای بدست آوردن فضای نمونه تمام حالت های ممکن در آزمایش را مینویسیم.

تعداد اعضای فضای نمونه (n(S)) : برای پیدا کردن تعداد اعضا فضای نمونه دو راه

راه اول : نوشتن فضای نمونه و پیدا کردن n(s)

راه دوم : پیدا کردن n(s) با استفاده از فرمول

دسته اول) فضای نمونه در آزمایش های معروف تاس ، سکه و فرزند :

در این دسته از آزمایش ها میتوان به راحتی با نوشتن مجموعه ی فضای نمونه ، تعداد اعضای فضای نمونه (n(s)) را پیدا کرد.

سوال ۱) فضای نمونه هریک از آزمایش های زیر را نوشته و تعداد اعضا فضای نمونه را تعیین کنید.

۱) تاس

۲) سکه

۳) فرزند

دسته دوم) فضای نمونه در آزمایش هایی که ترکیبی از تاس و سکه و فرزند هستند :

در این دسته از آزمایش ها دو حالت اتفاق می افتد :

حالت اول : اگر بین اجزا آزمایش اجبار برقرار باشد ، برای محاسبه تعداد اعضای فضای نمونه ((n(s)) از اصل ضرب استفاده میکنیم. در واقع n(s) برابر با حاصل ضرب فضای نمونه هریک از اجزا در یکدیگر .

به مثال های زیر توجه کنید .

سوال۲) در هریک از آزمایش های زیر اعضای فضای نمونه را تعیین کرده، n(s) را بدست آورید.

۱) دو فرزند

۲) سه فرزند

۳) چهار فرزند

نتیجه گیری : در آزمایش n فرزند ، فضای نمونه برابر با ..... می باشد!

۴) دو سکه

۵) سه سکه

نتیجه گیری : در آزمایش پرتاب n سکه یا پرتاب n بار یک سکه ، فضای نمونه برابر با ..... می باشد !

۶) دو تاس

۷) سه تاس

نتیجه گیری : در پرتاب n تاس یا پرتاب n بار یک تاس ،فضای نمونه برابر با ..... می باشد!

حالت دوم : اگر بین اجزا اختیار وجود داشته باشد، مساله را حالت بندی کرده و پس از محاسبه $n(s)$ هر حالت طبق اصل ضرب ، $n(s)$ حالت ها را طبق اصل جمع ، باهم جمع میکنیم .

سوال ۳) سکه ای را پرتاب می کنیم ، در صورتی که رو ظاهر شود تاس و در غیر این صورت دوبار دیگر سکه پرتاب میکنیم.فضای نمونه این آزمایش را نوشته و $n(s)$ را بدست آورید!

تاس را پرتاب میکنیم . در صورتی که زوج بیاید ، یک سکه و درصورتی که فرد بیاید دوسکه دیگر پرتاب می کنیم . فضای نمونه و $n(s)$ این آزمایش را تعیین کنید.

دسته سوم) فضای نمونه در آزمایش هایی که قرار است r شی از بین n شی انتخاب شود :

در این آزمایش ها میتوان فضای نمونه را بدست آورد و از روی آن $n(s)$ را محاسبه کرد.

اما در جاهایی که فقط مد نظر $n(s)$ باشد.

میتوان از رابطه ی زیر استفاده کرد :

$$n(s) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

سوال ۴) سه دانش آموز ریاضی و دو دانش آموز تجربی برای انتخابات شورای مدرسه کاندید شده اند ، قرار است ۳ نفر برای شورا انتخاب شوند . فضای نمونه این آزمایش تصادفی را به دست آورید .

سوال ۵) اعداد زوج کوچکتر از ۱۵ را روی کارت نوشته و داخل کیسه ای ریخته ایم و قرار است یک کارت را به تصادف خارج کنیم . فضای نمونه این آزمایش تصادفی را بنویسید .

دسته چهارم) فضای نمونه در آزمایش هایی که قرار است n شی در n جایگاه کنار هم قرار گیرند:

در این آزمایش ها میتوان از مفهوم جایگشت برای محاسبه تعداد اعضا فضای نمونه استفاده کرد .

در واقع برای $n(s)$ داریم :

$$n(s) = \text{مجموع جایگشت ها} = \text{مجموع حالت ها} = n!$$

در این دسته از آزمایش ها نوشتن مجموعه S خیلی مد نظر نیست !

سوال ۶) جایگشت های حروف کلمه **hesabi** را روی کارت های مختلف نوشته و آن ها را درون کیسه ای قرار میدهیم . یک کارت به تصادف خارج میکنیم . فضای نمونه این آزمایش تصادفی چند عضو دارد ؟

پله ی سوم

تعریف پیشامد و نحوه ی بدست آوردن آن :

هر زیر مجموعه از فضای نمونه S را ، یک پیشامد می نامیم . در واقع پیشامد یک مجموعه ای است که زیر مجموعه S است . باید بتوانیم مجموعه پیشامد و تعداد اعضا آن را تعیین کنیم . برای این مسائل را دسته بندی میکنیم.

دسته ی اول) پیشامد در مسائل معروف تاس ، سکه و فرزند :

در این قبیل مسائل بهترین روش برای بدست آوردن پیشامد و تعداد اعضا ؛ نوشتن مجموعه پیشامد است .

سوال۷) خانواده ای دارای چهار فرزند است . از جنسیت فرزندان این خانواده اطلاع نداریم .

مطلوب است :

الف) پیشامد اینکه دقیقا یک دختر داشته باشد

ب) پیشامد اینکه حداکثر یک دختر در خانواده متولد شده باشد

پ) پیشامد اینکه تعداد فرزندان پسر و دختر برابر باشد

ث) پیشامد اینکه تعداد فرزندان پسر از دختر بیشتر باشد

سوال ۸) دوتاس را پرتاب میکنیم . مطلوب است :

الف) پیشامد اینکه مجموع دو تاس برابر ۵ باشد.

ب)پیشامد اینکه فقط یکی از تاس ها ۳ بیاید.

پ) پیشامد اینکه یکی از تاس ها ۲ بیاید.

سوال ۹) خانواده ای دارای ۳ فرزند است . فضای نمونه ای مربوط به فرزندان این خانواده را و پیشامد آنکه حداقل یکی از فرزندان دختر باشد را مشخص کنید.

سوال ۱۰) و سکه ای را به هوا می اندازیم. اگر پشت بیاید، یک تاس می اندازیم و اگر رو بیاید دو سکه دیگر را می اندازیم :

الف) فضای نمونه ای این آزمایش تصادفی را مشخص کنید.

ب) پیشامد آنکه «تاس زوج بیاید» را مشخص کنید.

پ) پیشامد آنکه «حداقل ۲ سکه رو بیاید» را مشخص کنید .

دسته ی دوم) : پیشامد در مسائلی که قرار است r شی را از بین n شی انتخاب کنیم.

در این مساله میتوان مجموعه پیشامد مورد نظر را نوشت و از روی آن تعداد اعضا را تعیین کرد. اما اگر در مساله ای فقط تعداد اعضا پیشامد مدنظر باشد میتوان از رابطه ترکیب استفاده کرد ، دقت شود در محاسبه پیشامد از داخل دسته ها انتخاب کرده و اگر اجبار داشتیم از اصل ضرب اگر اختیار داشتیم از اصل جمع استفاده میکنیم .

سوال ۱۱) در جعبه ای ۳مهره قرمز متفاوت و ۲مهره آبی متفاوت داریم. اگر ۳ مهره خارج کنیم به تصادف مطلوب است :

الف) فضای نمونه این آزمایش تصادفی

ب) پیشامد اینکه حداقل یک مهره آبی داشته باشیم

پ) پیشامد اینکه هر سه مهره قرمز باشد

ت) پیشامد اینکه دو تا از مهره قرمز باشد

سوال ۱۲) و هر یک از اعداد طبیعی و زوج کوچک تر از ۱۱ را روی یک کارت می نویسیم و یکی از این کارت ها را به تصادف بر می داریم :

الف) فضای نمونه ای این آزمایش یا پدیده تصادفی را مشخص کنید .

ب) چه تعداد پیشامد تصادفی را روی این فضای نمونه ای می توان تعریف کرد؟

پ) پیشامد A را که در آن «عدد روی کارت انتخاب شده بر ۴ بخش پذیر باشد»، مشخص کنید .

سوال۱۳) هر یک از ارقام ۱ تا ۸ را روی یک کارت می نویسیم و آنها را در یک کیسه قرار می دهیم؛ سپس یک کارت به تصادف از کیسه خارج می کنیم. هر یک از پیشامدهای زیر را تعیین کنید :

الف) فضای نمونه ای و پیشامد A که در آن «عدد روی کارت زوج باشد».

ب) پیشامد B که در آن «عدد روی کارت اول باشد».

پ) پیشامد C که در آن «عدد رو شده بزرگ تر از ۲ باشد».

دسته سوم) : پیشامد در مسائلی که n شی در n جایگاه در کنار هم هستند:

در این مسائل پیشامد مورد نظر یکی از حالت های سند، کنار هم بودن و ..... می باشد . در هر حالت با استفاده مفهوم جایگشت تعداد اعضا پیشامد مورد نظر را تعیین میکنیم .

سوال ۱۴) اگر حروف کلمه جهانگردی به تصادف کنار هم قرار گیرند . مطلوب است :

الف) پیشامد اینکه حرف ی آخر باشد

ب) پیشامد اینکه حرف ی و د کنار هم باشند!

پ) پیشامد اینکه با حرف ی شروع شود و به ی ختم شود